Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 10 Aprile 2019

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Dimostra le seguenti proprietà:

1. Se X è completamente separabile (cioè se esiste una base di aperti numerabile) allora $|X| \leq \mathfrak{c}$.
2. Se X è separabile (cioè esiste un sottoinsieme denso numerabile) allora $|X| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Più in generale, se X ha un sottoinsieme denso di cardinalità κ allora $|X| \leq 2^{2^{\kappa}}$.
3. Se X è separabile e ogni suo punto ha una base di aperti numerabile, allora $|X| \leq \mathfrak{c}$. Più in generale, se X ha un sottoinsieme denso di cardinalità κ e X ha carattere μ (cioè ogni suo punto ha una base di intorni di cardinalità μ) allora $|X| \leq \kappa^{\mu}$.

Esercizio 2.

1. Supponendo che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, determinare la cardinalità dei seguenti 6 insiemi al variare delle coppie di naturali (i, j) con $0 \leq i \leq j \leq 2$:
$$\mathcal{F}_{ij} = \{f : \omega_i \to \omega_j \mid |\mathrm{Im}(f)| \leq \aleph_0\}$$
2. Supponiamo che $\aleph_\omega$ sia un limite forte. Determinare la cardinalità dell'insieme
$$\mathcal{F} = \{f : \aleph_\omega \to \mathbb{R} \mid \exists \alpha \in \aleph_\omega \; \forall \gamma, \gamma' \geq \alpha \;\; f(\gamma) = f(\gamma')\}.$$

Esercizio 3.

1. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 1)^{\omega \cdot 3 + 1}$.
2. Dimostrare che per ogni coppia di cardinali infiniti κ, ν dove κ è debolmente inaccessibile (cioè limite e regolare) si ha che $\kappa^\nu = \sup_{\mu < \kappa} \mu^\nu$.
3. Mostrare esempi di cardinali infiniti κ, ν tali che $\sup_{\mu < \kappa} \mu^\nu < \kappa$.
4. Dimostrare che vale l'uguaglianza $\sup_{n<\omega} (\aleph_n)^{\aleph_0} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$ se e solo se il continuo $\mathfrak{c} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.

Esercizio 4.

1. Sia α un ordinale qualunque, e sia κ un cardinale infinito. Dimostrare che le seguenti due proprietà sono equivalenti:
   (a) α è moltiplicativamente chiuso (cioè $\beta, \gamma < \alpha \Rightarrow \beta \cdot \gamma < \alpha$) e $\mathrm{cof}(\alpha) = \kappa$.
   (b) κ è il più piccolo cardinale per cui esiste una successione $\langle \alpha_i \mid i \in \kappa \rangle$ di elementi di α che è crescente, illimitata, e tale che $(\alpha_i)^2 < \alpha_{i+1}$ per ogni $i < \kappa$.
2. Supponiamo che con la divisione euclidea tra l'ordinale α e ω_1 si ottenga come quoziente un ordinale successore. Dimostrare che allora ogni funzione $g : \alpha \to \alpha$ strettamente crescente e continua ai limiti ammette almeno $\aleph_1$ punti fissi.