Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 19 Febbraio 2018

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti]

1. Trovare esplicitamente una bigezione $f : [0,1] \to (0,1)$ tra l'intervallo unitario chiuso $[0,1] = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1\}$ e l'intervallo unitario aperto $(0,1) = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$.
2. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa giustificando la risposta con una dimostrazione: *"$\mathbb{R}$ è unione numerabile di insiemi di cardinalità minore di $\mathbb{R}$."*
3. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa giustificando la risposta con una dimostrazione o un controesempio: *"Per ogni ordinale $\alpha < \omega_1$ esiste $A \subseteq \mathbb{Q}$ tale che α è isomorfo ad A".*[1]

Esercizio 2. [8 punti]

1. Dimostrare in dettaglio che per ogni α, se una funzione $f \in V_\alpha$ allora $\mathrm{dom}(f), \mathrm{Im}(f) \in V_\alpha$.
2. Nella teoria ZFC con l'assioma di fondazione, esistono insiemi non vuoti A tali che $A \times A \subseteq A$? Esistono insiemi non vuoti A tali che $A \times A = A$?
3. Determinare la classe di tutti gli ordinali α che soddisfano la seguente proprietà:[2]

$$A, B \in V_\alpha \implies \{f \mid f : A \to B\} \subseteq V_\alpha.$$

Esercizio 3. [8 punti]

1. Scrivere l'ordinale $(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 7)^3$ in forma normale di Cantor.
2. Dimostrare che un ordinale γ soddisfa l'uguaglianza $\gamma = \omega \cdot \gamma$ se e solo se esiste δ tale che $\gamma = \omega^\omega \cdot \delta$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Sia κ un cardinale infinito e sia $f : \kappa \to \kappa$ una funzione crescente e continua ai limiti con $f(0) > 0$. Dimostrare che il più piccolo α tale che $f(\alpha) = \alpha$ (se esiste) ha cofinalità numerabile.
2. Caratterizzare i cardinali κ per i quali si ha $|\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}| = \kappa$ per ogni $f : \kappa \to \kappa$ crescente e continua ai limiti.
3. Siano $\nu < \kappa$ due cardinali regolari, e sia $f : \kappa \to \kappa$ crescente e continua ai limiti. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathrm{Fix}_\nu(f) = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha \text{ e } \mathrm{cof}(\alpha) = \nu\}$.

---

[1] Su A si considera l'ordinamento indotto da $\mathbb{Q}$.

[2] V_γ è il livello γ nella *gerarchia cumulativa di von Neumann*, che è definita per ricorsione transfinita ponendo $V_0 = \emptyset$; $V_{\gamma+1} = \mathcal{P}(V_\gamma)$; $V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma$ se λ limite.