Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 16 Giugno 2014

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Definire esplicitamente una funzione iniettiva $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to S$, dove S è l'insieme delle bigezioni $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ senza punti fissi, cioè tali che $\sigma(n) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Determinare l'insieme di tutti gli ordinali α tali che esiste una funzione $f : \alpha \to \mathbb{R}$ che preserva l'ordine.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che l'unico ordinale $\rho < \omega^{\omega^2}$ tale che $\omega^\omega \cdot \rho = \rho$ è l'ordinale $\rho = 0$.

2. Determinare l'insieme di tutti gli ordinali α tali che $\omega^\omega \cdot \alpha = \alpha$.

Esercizio 3. Consideriamo la funzione-classe "*beth*":

$$\beth_0 = \aleph_0 \,, \quad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \,, \quad \beth_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.}$$

1. Dimostrare che la funzione *beth* ammette punti fissi arbitrariamente grandi, cioè che per ogni cardinale ν esiste un cardinale $\kappa > \nu$ tale che $\beth_\kappa = \kappa$.

2. Dimostrare che per ogni cardinale ν, il cardinale $\kappa = \min\{\mu > \nu \mid \beth_\mu = \mu\}$ ha cofinalità numerabile.

Esercizio 4.

1. Determinare il più piccolo ordinale α tale che $\{\mathcal{P}(\omega)\} \in V_\alpha$, e darne una dimostrazione.

2. Dimostrare che se $|V_\kappa| = \kappa$ allora κ è un *limite forte* (cioè κ è un cardinale tale che $\nu^\mu < \kappa$ per tutti i cardinali $\nu, \mu < \kappa$).