Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 16 Luglio 2012
Soluzioni

Esercizio 1.

1. Trovare la forma normale di Cantor degli ordinali $(\omega^3+\omega)^5$ e $(\omega^5+\omega^3)^3$.

2. Caratterizzare gli ordinali α, β tali che $\alpha \cdot \omega^\beta = \omega^\beta$.

Soluzione. (1). Ci sarà utile la seguente proprietà generale:

($\star$) Se $\omega^\gamma \leq \alpha < \omega^{\gamma+1}$ allora $\alpha \cdot \omega = \omega^{\gamma+1}$.

Per dimostrarla, osserviamo che $\alpha \cdot \omega \geq \omega^\gamma \cdot \omega = \omega^{\gamma+1}$. Inoltre $\alpha < \omega^{\gamma+1} = \omega^\gamma \cdot \omega \Rightarrow \alpha \leq \omega^\gamma \cdot n$ per un opportuno n, e allora $\alpha \cdot \omega \leq (\omega^\gamma \cdot n) \cdot \omega = \omega^\gamma \cdot (n \cdot \omega) = \omega^\gamma \cdot \omega = \omega^{\gamma+1}$.

Notiamo che $\omega^3+\omega = \omega \cdot (\omega^2+1)$, ed inoltre, vista la ($\star$), si ha che $(\omega^2+1)\cdot\omega = \omega^3$. Abbiamo allora le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}(\omega^3+\omega^5) &= [\omega\cdot(\omega^2+1)]^5 = \omega\cdot[(\omega^2+1)\cdot\omega]\cdot[(\omega^2+1)\cdot\omega]\cdot[(\omega^2+1)\cdot\omega]\cdot[(\omega^2+1)\cdot\omega]\cdot(\omega^2+1)\\ &= \omega\cdot\omega^3\cdot\omega^3\cdot\omega^3\cdot\omega^3\cdot(\omega^2+1) = \omega^{13}\cdot(\omega^2+1) = \omega^{15}+\omega^{13}.\end{aligned}$$

Notiamo ora che $(\omega^2+1)\cdot\omega^3 = [(\omega^2+1)\cdot\omega]\cdot\omega^2 = \omega^3\cdot\omega^2 = \omega^5$, ed abbiamo quindi anche le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}(\omega^5+\omega^3)^3 &= [\omega^3\cdot(\omega^2+1)]^3 = \omega^3\cdot[(\omega^2+1)\cdot\omega^3]\cdot[(\omega^2+1)\cdot\omega^3]\cdot(\omega^2+1)\\ &= \omega^3\cdot\omega^5\cdot\omega^5\cdot(\omega^2+1) = \omega^{13}\cdot(\omega^2+1) = \omega^{15}+\omega^{13}.\end{aligned}$$

(2). Se $\alpha = 0$, allora $\alpha\cdot\omega^\beta = 0 < \omega^\beta$ per ogni β. Se $\beta = 0$, allora $\omega^\beta = 1$ e l'uguaglianza $\alpha\cdot\omega^\beta = \omega^\beta$ vale se e solo se $\alpha = 1$. Da qui in avanti possiamo supporre allora $\alpha, \beta \geq 1$. Usando la forma normale di Cantor, sappiamo che esiste (ed unico) ordinale γ tale che $\omega^\gamma \leq \alpha < \omega^{\gamma+1}$. In particolare $\alpha \leq \omega^\gamma \cdot n$ per un opportuno $n < \omega$, ed allora $\alpha\cdot\omega^\beta \leq (\omega^\gamma\cdot n)\cdot\omega^\beta = \omega^\gamma\cdot(n\cdot\omega^\beta) = \omega^\gamma\cdot\omega^\beta \leq \alpha\cdot\omega^\beta$. Dunque: $\alpha\cdot\omega^\beta = \omega^\gamma\cdot\omega^\beta = \omega^{\gamma+\beta} = \omega^\beta$ se e solo se $\gamma+\beta = \beta$. Notiamo infine che quest'ultima uguaglianza vale se e solo se $\beta \geq \gamma\cdot\omega$. Infatti in questo caso, usando la differenza tra ordinali, possiamo scrivere $\beta = \gamma\cdot\omega+\rho$ per un opportuno ρ, ed allora $\gamma+\beta = \gamma+(\gamma\cdot\omega+\rho) = (\gamma+\gamma\cdot\omega)+\rho = \gamma\cdot(1+\omega)+\rho = \gamma\cdot\omega+\rho = \beta$. Viceversa, se $\beta < \gamma\cdot\omega$, allora $\gamma+\beta > \beta$. Infatti, in questo caso $\gamma\cdot n \leq \beta < \gamma\cdot(n+1)$ per un opportuno $n < \omega$, e dunque $\beta < \gamma\cdot(n+1) = \gamma+\gamma\cdot n \leq \gamma+\beta$.

In conclusione, $\alpha\cdot\omega^\beta = \omega^\beta$ se e solo se $\beta \geq \gamma\cdot\omega$ dove γ è l'esponente tale che $\omega^\gamma \leq \alpha < \omega^{\gamma+1}$. (Notiamo che se $\alpha = 1$ allora $\gamma = 0$, e in questo caso qualunque β soddisfa la proprietà richiesta.)

Esercizio 2. Dato un insieme A, si consideri la seguente proprietà:[1]

$$\mathrm{EXT}_A: \quad \forall x, y \in A\ [\forall t \in A\ (t \in x \leftrightarrow t \in y)] \rightarrow x = y.$$

1. Mostrare un esempio di insieme A tale che EXT_A *non* vale.

2. Dimostrare che se A è transitivo, allora EXT_A vale.

3. Vale l'implicazione inversa nella (2)?

[1] Si tratta della *relativizzazione* all'universo A dell'*Assioma di Estensionalità*.

Soluzione. (1). Si consideri l'insieme $A = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$. Chiaramente

$$\emptyset \notin \emptyset,\ \emptyset \notin \{\{\emptyset\}\},\ \{\{\emptyset\}\} \notin \emptyset,\ \{\{\emptyset\}\} \notin \{\{\emptyset\}\},$$

e dunque si ha banalmente che i due elementi diversi $\emptyset \neq \{\{\emptyset\}\}$ soddisfano la formula

$$\forall t \in A\ (t \in \emptyset \leftrightarrow t \in \{\{\emptyset\}\}),$$

visto che si considera una doppia implicazione tra proprietà false. In altre parole questo significa che i due elementi distinti $\emptyset \neq \{\{\emptyset\}\}$ sono entrambi visti come insiemi vuoti nell'universo A, contraddicendo l'estensionalità.

(2). Supponiamo che $x, y \in A$ siano tali che

$$\forall t \in A\ (t \in x \leftrightarrow t \in y).$$

Se $t \in x$, da $t \in x \in A$ segue per transitività che $t \in A$ e dunque, per l'ipotesi, $t \in y$. Questo dimostra l'inclusione $x \subseteq y$. L'altra inclusione $y \subseteq x$ si dimostra nello stesso modo, e allora si può concludere che $x = z$, come volevamo.

(3). Se $A = \{0, 2\}$ dove $0, 2$ sono gli ordinali di von Neumann, allora EXT_A vale. La verifica è immediata e segue dal fatto che i due elementi diversi $0 \neq 2$ di A si possono distinguere usando l'elemento $0 \in A$; infatti, $0 \notin 0$ ma $0 \in 2$. Tuttavia A non è transitivo perché $1 \in 2 \in A$ ma $1 \notin A$.

Esercizio 3. Si consideri la gerarchia cumulativa di von Neumann:

$$V_0 = \emptyset\,; \quad V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)\,; \quad V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \text{ se } \lambda \text{ limite.}$$

1. Dimostrare che per ogni cardinale infinito κ vale la seguente equivalenza:

$$\kappa < \mathrm{cof}(\alpha) \iff \mathrm{Fun}(\kappa, V_\alpha) \subseteq V_\alpha.$$

2. Dimostrare che per ogni $\alpha > 0$, esiste ed unica funzione *rango* $\rho_\alpha : V_\alpha \to \alpha$ tale che

$$\rho_\alpha(\emptyset) = 0\,; \quad \rho_\alpha(A) = \sup\{\rho_\alpha(a) + 1 \mid a \in A\} \quad \text{se } A \neq \emptyset.$$

Soluzione. (1). Supponiamo prima che $\kappa < \mathrm{cof}(\alpha)$. Chiaramente $\kappa \in V_\alpha$ perchè $\kappa < \alpha$; inoltre α è un ordinale limite, visto che κ è un cardinale infinito. Adesso prendiamo $f : \kappa \to V_\alpha$ una qualunque funzione, e per ogni $i \in \kappa$ consideriamo $\beta_i = \min\{\beta < \alpha \mid f(i) \in V_\beta\}$. Dall'ipotesi sulla cofinalità segue che l'insieme $\{\beta_i \mid i \in \kappa\}$ è limitato in α e perciò $\gamma = \sup_{i\in\kappa} \beta_i < \alpha$. Ma allora $f : \kappa \to V_\gamma$ dove sia κ che V_γ appartengono a V_α. Visto che α è limite, possiamo concludere che $f \in V_\alpha$, e questo completa la dimostrazione dell'inclusione $\mathrm{Fun}(\kappa, V_\alpha) \subseteq V_\alpha$).

Viceversa, se per assurdo fosse $\kappa \geq \mathrm{cof}(\alpha)$, allora esisterebbe una funzione illimitata $f : \kappa \to \alpha$. Visto che $\alpha \subseteq V_\alpha$, banalmente $f \in \mathrm{Fun}(\kappa, V_\alpha)$; tuttavia $f \notin V_\alpha$, altrimenti $\mathrm{Imm}(f) \in V_\alpha$ e dunque anche $\alpha = \bigcup \mathrm{Imm}(f) \in V_\alpha$, mentre sappiamo che $\alpha \notin V_\alpha$.

(2). Procediamo per induzione transfinita. Per $\alpha = 1$ la tesi è banale perché $\rho_1(\emptyset) = 0$ è l'unica funzione rango per $V_1 = \{\emptyset\}$. Consideriamo ora il caso limite λ. Notiamo che se ρ_γ è una funzione rango su V_γ e $\delta < \gamma$, allora la restrizione $\rho_\gamma\restriction_{V_\delta}$ è una funzione rango su V_δ e dunque, visto che per ipotesi induttiva vale l'unicità, deve essere $\rho_\gamma\restriction_{V_\delta} = \rho_\delta$. Questo dimostra che le funzioni rango $\{\rho_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ sono una l'estensione dell'altra, e dunque la loro unione $\rho_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \rho_\gamma$ è una funzione definita su $\bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma = V_\lambda$. Dalle ipotesi induttive, è immediato verificare che ρ_λ è l'unica funzione su V_λ che soddisfa le proprietà di una funzione rango. Nel caso successore $\beta + 1$, poniamo $\rho_{\beta+1}(\emptyset) = 0$ e

$$\rho_{\beta+1}(A) \ = \ \sup\{\rho_\beta(a) + 1 \mid a \in A\}.$$

Notiamo che $a \in A \in V_{\beta+1} \Rightarrow a \in V_\beta \Rightarrow \rho_\beta(a) < \beta \Rightarrow \rho_\beta + 1 \leq \beta$, e dunque $\rho_{\beta+1} : V_{\beta+1} \to \beta + 1$ è ben definita. Inoltre banalmente la restrizione $\rho_{\beta+1}\restriction_{V_\beta} = \rho_\beta(A)$, e possiamo concludere che $\rho_{\beta+1}$ è l'unica funzione rango su $V_{\beta+1}$.[2]

Esercizio 4. Per ogni cardinale infinito ν denotiamo con $\gimel(\nu) = \nu^{\mathrm{cof}(\nu)}$ (funzione classe *"ghimel"*), e con $2^{<\nu} = \sup_{\mu<\nu} 2^\mu$. Dimostrare le proprietà seguenti, dove κ è un cardinale infinito:

1. Se κ è regolare, allora $2^\kappa = \gimel(\kappa)$.
2. Se κ è limite, allora $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.
3. Se κ è singolare ed esiste $\zeta < \kappa$ con $2^\zeta = 2^{<\kappa}$, allora $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.
4. Se κ è singolare e l'insieme $\{2^\mu \mid \mu < \kappa\}$ non ha massimo, allora $2^\kappa = \gimel(2^{<\kappa})$.

Soluzione. (1). In questo caso $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$ e dunque $2^\kappa = \kappa^\kappa = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.

(2). Denotiamo $\xi = \mathrm{cof}(\kappa)$ e scriviamo $\kappa = \sum_{i\in\xi} \kappa_i$ per opportuni cardinali $\kappa_i < \kappa$. Si ha:

$$2^\kappa \;=\; 2^{\sum_{i\in\xi}\kappa_i} \;=\; \prod_{i\in\xi} 2^{\kappa_i} \;\leq\; \prod_{i\in\xi} 2^{<\kappa} \;=\; (2^{<\kappa})^\xi \;\leq\; (2^\kappa)^\xi \;=\; 2^{\kappa\cdot\xi} \;=\; 2^\kappa.$$

(3). Dal punto precedente segue che $2^\kappa = (2^\zeta)^{\mathrm{cof}(\kappa)} \leq 2^{<\kappa} \leq 2^\kappa$.

(4). Vista l'ipotesi, l'insieme $\{2^\mu \mid \mu < \kappa\}$ è un insieme illimitato in $2^{<\kappa}$, e dunque $\mathrm{cof}(2^{<\kappa}) \leq \kappa$. D'altra parte, visto che κ è singolare e quindi limite, esiste una sequenza crescente illimitata di cardinali $\langle \kappa_i \mid i \in \mathrm{cof}(\kappa)\rangle$ in κ. Dunque $\langle 2^{\kappa_i} \mid i \in \mathrm{cof}(\kappa)\rangle$ è illimitata in $2^{<\kappa}$ e perciò vale anche l'altra disuguaglianza $\kappa \leq \mathrm{cof}(2^{<\kappa})$. Per concludere, basta allora applicare la (2) notando che:

$$\gimel(2^{<\kappa}) \;=\; (2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)} \;=\; 2^\kappa.$$

[2] Questo esercizio poteva anche essere risolto in modo alternativo e più diretto, dimostrando che $\rho_\alpha : V_\alpha \to \alpha$ è una funzione rango se e solo se $\rho_\alpha(A) = \min\{\beta < \alpha \mid A \subseteq V_\beta\}$ per ogni $A \in V_\alpha$.