Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 25 Giugno 2012

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

Buon lavoro!

Esercizio 1. Assumiamo che valga l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ per ogni α. Determinare le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 = \{A \subseteq \omega_{11} \mid |A| = \aleph_0\}$
2. $X_2 = \{A \subseteq \omega_{11} \mid |A| = \aleph_5\}$.
3. $X_3 = \{f : \omega_{11} \to \omega_5 \mid f \text{ è illimitata}\}$.
4. $X_4 = \{f : \omega_5 \to \omega_{11} \mid f \text{ è strettamente crescente}\}$.

Esercizio 2. Siano $\alpha, \beta > 2$ ordinali.

1. Dimostrare che $\alpha^\beta = \alpha \cdot \beta$ se e solo se $\alpha^\beta = \beta$.
2. Dimostrare che per ogni α esistono β arbitrariamente grandi tali che $\alpha^\beta = \alpha \cdot \beta$.

Esercizio 3. Consideriamo la *gerarchia di von Neumann*: $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ è limite. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{F} \in V_\alpha \;\Rightarrow\; \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_\alpha$.
2. $A \in V_\alpha \;\Rightarrow\; \mathrm{TC}(A) \in V_\alpha$.[1]
3. $A \in V_\omega \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{TC}(A)| < \aleph_0$.[2]

Esercizio 4. Siano κ e ν cardinali infiniti. Dimostrare le proprietà seguenti.

1. Se $\mu^\nu < \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$ e se $\nu < \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \kappa$.
2. Se $\mu^\nu < \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$ e se $\nu \geq \mathrm{cof}(\kappa)$ allora κ è singolare ed inoltre $\kappa^\nu = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.
   [Suggerimento: usare la formula per i prodotti infiniti.]

---

[1] Ricordiamo che la *chiusura transitiva* $\mathrm{TC}(A)$ è il più piccolo insieme transitivo che contiene A, ed è uguale all'unione $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ dove $A_0 = A$ e $A_{n+1} = \bigcup A_n$.

[2] Per l'implicazione $\Leftarrow$ è necessario l'uso dell'assioma di Fondazione.