Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 1 Giugno 2012

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:[1]

1. $A_1 = \{f : \omega \to \omega \mid \text{supp}(f) \text{ è finito}\}$.
2. $A_2 = \{f : \omega_1 \to \omega \mid |\text{supp}(f)| = \aleph_0\}$.
3. $A_3 = \{f : \omega_2 \to \omega_1 \mid |\text{supp}(f)| \leq \aleph_1\}$.
4. $A_4 = \{f : \omega_n \to \omega_m \mid |\text{supp}(f)| = \aleph_k\}$ dove n, m, k sono numeri naturali con $k \leq n$.

Esercizio 2.

1. Trovare tutti e soli gli ordinali $\alpha, \beta < \omega^2$ tali che $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
2. Dimostrare che l'esponenziale α^β tra ordinali infiniti ha cardinalità uguale al massimo tra la cardinalità di α e quella di β. In formula: $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Esercizio 3. Si assuma l'*ipotesi generalizzata del continuo* (GCH), cioè $2^\xi = \xi^+$ per ogni ξ cardinale infinito.[2] Dimostrare che per ogni cardinale infinito κ:

1. Se $\mu, \eta < \kappa$ allora $\mu^\eta \leq \kappa$.
2. $\kappa^{\text{cof}(\kappa)} = \kappa^+$.
3. Se $\kappa \leq \nu$ allora $\kappa^\nu = \nu^+$.
4. Se $\text{cof}(\kappa) \leq \nu \leq \kappa$ allora $\kappa^\nu = \kappa^+$.

Esercizio 4. Consideriamo la gerachia di von Neumann: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, e $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ per λ limite.

1. Caratterizzare gli ordinali α tali che tutte le funzioni $f : \omega + \omega \to V_\alpha$ appartengono a V_α.
2. Caratterizzare le coppie di ordinali α, β tali che tutte le funzioni $f : \alpha \to V_\beta$ appartengono a V_β.
3. Caratterizzare le coppie di ordinali α, β tali che $\text{Fun}(V_\alpha, V_\beta) = \{f \mid f : V_\alpha \to V_\beta\} \subseteq V_\beta$.
4. [*] Caratterizzare gli ordinali α tali che per ogni $A \in V_\alpha$ e per ogni $f : A \to V_\alpha$ si ha $f \in V_\alpha$.

[1] Ricordiamo che il *supporto* di una funzione $f : X \to Y$ è l'insieme degli elementi del dominio su cui assume valori non nulli, cioè $\text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

[2] Ricordare che ξ^+ denota il cardinale successore di ξ, cioè $\xi^+ = \min\{\zeta \mid \zeta > \xi\}$.