Elementi di Teoria degli Insiemi
Appello Straordinario - Prova scritta del 2.12.2011

Cognome e nome: ..........................................................................................

E-mail (per eventuali comunicazioni): ...........................................................

**Tutte le risposte devono essere giustificate**

Buon lavoro!

**Esercizio 1.** Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:[1]

1. $Y_1 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di $\mathbb{N}\}$;
2. $Y_2 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione finita di $\mathbb{N}\}$;
3. $Y_3 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione infinita di $\mathbb{N}$ dove ogni $F \in \mathcal{F}$ è infinito$\}$.

**Soluzione.** Tutti e tre gli insiemi di sopra hanno la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$. Per vedere che $|Y_1| \leq \mathfrak{c}$ possiamo procedere in diversi modi. Un primo modo è il seguente. Consideriamo la funzione $\psi : \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \to Y_1$ definita ponendo $\psi : f \mapsto \{f^{-1}(n) \mid n \in \mathrm{Im}(f)\}$ (dunque $\psi$ associa ad ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la partizione da essa indotta su $\mathbb{N}$ considerando le contro-immagini). Allora $\psi$ è suriettiva. Infatti, se $\mathcal{F}$ è una partizione di $\mathbb{N}$, prendiamo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione tale che $g(n) = \min A$, dove $A$ è quell'elemento (unico) della partizione tale che $n \in A$. È facile verificare che $\psi(g) = \mathcal{F}$.

Un secondo modo è osservare che ogni partizione $\mathcal{F}$ è al più numerabile (infatti, ad esempio, la funzione $f : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ dove $f(A) = \min A$ è iniettiva). Allora $Y_1 \subseteq [\mathcal{P}(\mathbb{N})]^{\leq \aleph_0}$ e quindi $|Y_1| \leq |[\mathcal{P}(\mathbb{N})]^{\leq \aleph_0}| = |[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}| = \mathfrak{c}$.[2] Ricordiamo infatti che l'insieme $[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}$ di tutti i sottoinsiemi al più numerabili di $\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo.

Un ulteriore modo di dimostrare che $|Y_1| \leq \mathfrak{c}$ è notare che le partizioni di $\mathbb{N}$ sono in corrispondenza biunivoca con le relazioni di equivalenza su $\mathbb{N}$, le quali sono speciali sottoinsiemi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dunque $|Y_1| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

Visto che banalmente sia $Y_2$ che $Y_3$ sono inclusi in $Y_1$, si ha che $|Y_2|, |Y_3| \leq |Y_1| \leq \mathfrak{c}$. Per completare l'esercizio basta allora verificare le disuguaglianze $\mathfrak{c} \leq |Y_2|$ e $\mathfrak{c} \leq |Y_3|$. Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, consideriamo l'insieme $2A = \{2n \mid n \in A\}$. Notiamo che la corrispondenza $A \mapsto \{2A, (2A)^c\}$ determina una funzione iniettiva $\varphi : \mathcal{P}(N) \to Y_2$, e quindi $|Y_2| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.[3]

Ricordiamo che la famiglia $[\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ dei sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ ha la cardinalità del continuo. Di conseguenza, anche la famiglia $[P]^{\aleph_0}$ dei sottoinsiemi infiniti di numeri primi ha la cardinalità del continuo. Per ogni numero primo $p$, denotiamo con $C(p) = \{p^n \mid n \geq 1\}$ l'insieme di tutte le potenze di $p$. Consideriamo ora la funzione $\varphi : [P]^{\aleph_0} \to Y_3$ che associa ad ogni insieme infinito $B$ di numeri primi, la partizione costituita dagli insiemi disgiunti e infiniti $C(p)$ al variare di $p \in B$, e dalla parte rimanente $\mathbb{N} \setminus (\bigcup_{p \in B} C(p))$. È facile verificare che tale partizione appartiene effettivamente a $Y_3$, ed inoltre che la funzione $\varphi$ è iniettiva. Concludiamo così che $\mathfrak{c} = |[P]^{\aleph_0}| \leq |Y_3|$, come volevamo.

[1] Una *partizione* di $X$ è una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi non vuoti a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = X$.

[2] Ricordiamo che se $A$ è un insieme e $\kappa$ un cardinale, si denota con $[A]^\kappa = \{X \subseteq A \mid |A| = \kappa\}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $A$ di cardinalità $\kappa$. Analogamente, $[A]^{\leq \kappa}$ denota l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $A$ di cardinalità minore o uguale a $\kappa$.

[3] ATTENZIONE: la funzione $\theta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to Y_2$ definita ponendo $A \mapsto \{A, A^c\}$ <u>non</u> è iniettiva, perchè $\theta(A) = \theta(A^c)$ per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$.

Un altro modo per ottenere la stessa disuguaglianza è il seguente. Anzitutto, visto che $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, l'insieme $Y_3$ è equipotente all'insieme $Y_3'$ costituito da tutte le partizioni di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in infiniti pezzi infiniti. Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito, considero la partizione $\mathcal{G}_A$ determinata dagli insiemi $\{a\} \times \mathbb{N}$ al variare di $a \in A$, ed inoltre dagli insiemi $\{x\} \times \text{PARI}$ e $\{x\} \times \text{DISPARI}$ al variare di $x \notin A$. È facile verificare che la corrispondenza $A \mapsto \mathcal{G}_A$ determina una funzione iniettiva $\varphi : [\mathbb{N}]^{\aleph_0} \to Y_3'$, e dunque $\mathfrak{c} = |[\mathbb{N}]^{\aleph_0}| \leq |Y_3'| = |Y_3|$.

**Esercizio 2.**

1. Dimostrare che per ogni coppia di ordinali $\beta \leq \alpha$ esiste ed un unico ordinale $\gamma$ tale $\beta + \gamma = \alpha$.
   Un tale ordinale $\gamma$ si denota $\alpha - \beta$.

2. Trovare tutti gli ordinali $\alpha$ per i quali esiste $\beta$ tale che $\alpha - \beta = \beta$.

3. Trovare tutti gli ordinali $\alpha$ per i quali esiste $\beta \neq 0$ tale che $\alpha - \beta = \alpha$.

**Soluzione.** (1). Sia $\delta$ il minimo degli ordinali tali che $\beta + \delta > \alpha$ (tale ordinale è ben definito perché in effetti esistono ordinali con quella proprietà; ad esempio, $\beta+(\alpha+1) \geq \alpha+1 > \alpha$). Notiamo che un tale $\delta$ non può essere 0; ed inoltre non può essere un ordinale limite, altrimenti anche $\beta + \delta$ sarebbe un limite, e da $\alpha < \beta + \delta = \bigcup_{\xi<\delta} \beta + \xi$ seguirebbe che $\alpha < \beta + \xi$ per qualche $\xi < \delta$, contraddicendo la minimalità di $\delta$. Dunque $\delta = \gamma + 1$ è un successore. Per minimalità $\beta + \gamma \leq \alpha$, e visto che $\beta + (\gamma + 1) \geq \alpha + 1$ deve necessariamente essere $\beta + \gamma = \alpha$, come volevamo. Per verificare l'unicità, basta controllare che se $\gamma \neq \gamma'$ sono due ordinali diversi, allora anche $\beta + \gamma \neq \beta + \gamma'$. Ma questo è immediato perché se, ad esempio, $\gamma < \gamma'$, allora $\beta + \gamma < \beta + \gamma + 1 \leq \beta + \gamma'$.

(2). Per definizione, si tratta di trovare tutti gli ordinali $\alpha$ per i quali esiste un $\beta$ con $\beta + \beta = \alpha$. Tali ordinali $\alpha$ sono tutti e soli quelli che soddisfano la seguente proprietà:

($\star$) $\alpha = \omega^\gamma \cdot n + \alpha'$ dove $n > 0$ è un numero naturale pari, e $\alpha' < \omega^\gamma$.

(Notiamo che ($\star$) vale se e solo se nella *forma normale di Cantor* $\alpha = \omega^{\alpha_k} \cdot n_k + \ldots + \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + n_0$, il coefficiente $n_k$ è pari.) Se $\alpha$ soddisfa ($\star$), prendiamo $\beta = \omega^\gamma \cdot m + \alpha'$ dove $2m = n$. Allora si ha:

$$\beta+\beta \;=\; \omega^\gamma \cdot m + (\alpha' + \omega^\gamma) + \omega^\gamma \cdot (m-1) + \alpha' \;=\; \omega^\gamma \cdot m + \omega^\gamma + \omega^\gamma \cdot (m-1) + \alpha' = \omega^\gamma(2m) + \alpha' = \alpha.$$

Ricordiamo infatti che $\alpha' < \omega^\gamma \Rightarrow \alpha' + \omega^\gamma = \omega^\gamma$.

Viceversa, se $\alpha = \beta + \beta$ per qualche ordinale $\beta$, allora $\alpha$ soddisfa ($\star$). Infatti, se scriviamo $\beta$ nella forma $\beta = \omega^\gamma \cdot m + \beta'$ dove $m$ è un naturale non nullo e $\beta' < \omega^\gamma$, allora, con un calcolo analogo a sopra, si verifica facilmente che $\beta + \beta = \omega^\gamma \cdot (2m) + \beta'$ dove $\beta' < \omega^\gamma$.

(3). Si tratta di trovare tutti gli ordinali $\alpha$ per i quali esiste un $\beta$ con $\beta + \alpha = \alpha$. Tali ordinali $\alpha$ sono tutti e soli gli ordinali infiniti. Infatti se $\alpha \geq \omega$ allora, usando la proprietà (1) di sopra, esiste ed unico $\gamma$ tale che $\alpha = \omega + \gamma$. Ma allora, prendendo $\beta = 1$, si ha che $1 + \alpha = (1 + \omega) + \gamma = \omega + \gamma = \alpha$. Viceversa, è immediato verificare che gli ordinali finiti *non* soddisfano la proprietà richiesta.

**Esercizio 3.** Dimostrare in dettaglio la seguente proprietà: "Siano $\nu \leq \kappa$ cardinali infiniti. Allora $\text{cof}(\kappa) \leq \nu$ se e solo se esiste una $\nu$-sequenza di cardinali (non nulli) $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \nu \rangle$ dove $\kappa_\alpha < \kappa$ per ogni $\alpha < \nu$ e $\kappa = \sum_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha$".[4]

**Soluzione.** Supponiamo prima che $\mu = \text{cof}(\kappa) \leq \kappa$. Allora esiste una funzione crescente e illimitata $f : \mu \to \kappa$.[5] Poiché $f$ è illimitata, $\kappa = \bigcup_{\alpha<\mu} f(\alpha)$. Consideriamo ora gli insiemi $f(\alpha+1)\setminus f(\alpha)$

[4] Per definizione, $\text{cof}(\kappa) = \min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists f : \alpha \to \kappa \text{ crescente e illimitata}\}$ o, equivalentemente, $\text{cof}(\kappa) = \min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists f : \alpha \to \kappa \text{ illimitata}\}$.

[5] Attenzione: potrebbero *non* esistere funzioni crescenti e illimitate $g : \nu \to \kappa$, vedi la **NOTA**.

al variare di $\alpha < \mu$. Tali insiemi sono a due a due disgiunti ed inoltre, poiché $f$ è crescente, $\kappa = \bigcup_{\alpha<\mu}(f(\alpha+1)\setminus f(\alpha))$. Allora, se denotiamo con $\kappa_\alpha = |f(\alpha+1)\setminus f(\alpha)|$, per definizione di somma infinita di cardinali, si ha che $\kappa = \sum_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha$. A questo punto basta prolungare la $\mu$-sequenza $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \mu\rangle$ ad una $\nu$-sequenza, $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \nu\rangle$ ponendo $\kappa_\alpha = 1$ qualora $\alpha \in \nu \setminus \mu$. In questo modo, banalmente $\sum_{\alpha<\nu}\kappa_\alpha = \sum_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha = \kappa$.

Un altro modo per dimostrare la stessa proprietà è il seguente. Per ogni $\alpha < \mu$, sia $\kappa_\alpha = |f(\alpha)|$ la cardinalità dell'ordinale $f(\alpha)$. Vogliamo dimostrare che $\sum_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha = \kappa$. Occorre attenzione, perché in generale *non* è vero che $\sup_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha = \kappa$.[6] Distinguiamo dunque due casi. Se accade che $\sup_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha = \kappa$, allora la tesi segue subito perché, in base ad un risultato dimostrato a lezione sulle somme infinite, $\sum_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha = \max\{\sup_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha, \mu\} = \max\{\kappa, \mu\} = \kappa$. Se invece $\sup_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha = \zeta < \kappa$, allora $\kappa = \zeta^+$ è il cardinale successore di $\zeta$ (se per assurdo fosse $\zeta^+ < \kappa$, visto che $f$ è illimitata esisterebbe $\gamma < \mu$ tale che $f(\gamma) \geq \zeta^+$ e dunque $\sup_{\alpha<\mu}|f(\alpha)| \geq |f(\gamma)| > \zeta$, contro la nostra ipotesi). Ma allora $\kappa$ è un cardinale regolare, quindi $\mu = \kappa$ e, analogamente a sopra, $\sum_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha = \max\{\sup_{\alpha<\mu}\kappa_\alpha, \mu\} = \max\{\zeta, \kappa\} = \kappa$.

Dimostriamo ora l'implicazione inversa, e supponiamo che $\sum_{\alpha<\nu}\kappa_\alpha = \max\{\sup_{\alpha<\nu}\kappa_\alpha, \nu\} = \kappa$. Se $\sup_{\alpha<\nu}\kappa_\alpha = \bigcup_{\alpha<\nu}\kappa_\alpha = \kappa$, allora la corrispondenza $\alpha \mapsto \kappa_\alpha$ determina una funzione illimitata $f : \nu \to \kappa$, e quindi $\nu \geq \mathrm{cof}(\kappa)$. Se invece $\sup_{\alpha<\nu}\kappa_\alpha < \kappa$, allora $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \kappa = \nu$.

**NOTA**: *Non* è vero che se $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \nu \leq \kappa$, allora esiste una funzione $f : \nu \to \kappa$ crescente e illimitata. Ad esempio, prendendo $\kappa = \aleph_\omega$ e $\nu = \aleph_1$ si ha che $\aleph_0 = \mathrm{cof}(\aleph_\omega) < \aleph_1 < \aleph_\omega$, ma *non* esistono funzioni crescenti e illimitate $f : \aleph_1 \to \aleph_\omega$.

**Esercizio 4.**

1. Dimostrare che se $f : \omega_1 \to \alpha$ è strettamente crescente, allora $\mathrm{Im}(f) \subseteq \omega_1\cdot\beta$, dove $\beta$ è il quoziente della divisione euclidea di $\alpha$ con $\omega_1$.

2. Dimostrare che se $f : \omega_1 \to \alpha$ è strettamente crescente, e se $\mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_0$, allora $f$ è limitata.

3. È vero che ogni $f : \omega_1 \to \alpha$ strettamente crescente e continua ammette punti fissi?[7]

**Soluzione.** (1). Con la divisione euclidea, scriviamo $\alpha = \omega_1 \cdot \beta + \rho$ dove il resto $\rho < \omega_1$. Se per assurdo fosse $\mathrm{Im}(f) \nsubseteq \omega_1 \cdot \beta$, prendiamo $\gamma \in \omega_1$ tale che $f(\gamma) \geq \omega_1 \cdot \beta$. Visto che $f$ è crescente, allora $f(\gamma') \geq \omega_1 \cdot \beta$ per ogni $\gamma' \geq \gamma$. Per l'iniettività di $f$, l'insieme di immagini $\{f(\gamma') \mid \gamma \leq \gamma' < \omega_1\}$ ha la stessa cardinalità di $\omega_1 \setminus \gamma$, cioè $\aleph_1$, visto che $\gamma$ è numerabile. Ma questo è assurdo perché $\{f(\gamma') \mid \gamma \leq \gamma' < \alpha\} \subseteq \alpha \setminus (\omega_1 \cdot \beta)$, e $|\alpha \setminus (\omega_1 \cdot \beta)| = |\rho| \leq \aleph_0$ è al più numerabile.

(2). Poiché $\mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_0$, possiamo prendere una successione $\langle \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ di elementi di $\alpha$ crescente e illimitata. Se $\gamma_n = \min\{\gamma \in \omega_1 \mid f(\gamma) \geq \alpha_n\}$, allora $\gamma < \gamma_n \Leftrightarrow f(\gamma) < \alpha_n$ e quindi $\Gamma_n = \{\gamma \in \omega_1 \mid f(\gamma) < \alpha_n\}$ è al più numerabile, dal momento che $|\Gamma_n| = |\gamma_n|$. Ma $f$ è illimitata, dunque $\alpha = \bigcup_{\gamma<\omega_1} f(\gamma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n$ è unione numerabile di insiemi al più numerabili, e quindi $|\alpha| \leq \aleph_0$. Questo è assurdo perchè $|\alpha| \geq \omega_1$, visto che $f : \omega_1 \to \alpha$ è iniettiva.

(3). No. Ad esempio sia $\alpha = \omega_1^2 = \omega_1 \cdot \omega_1$, e sia $f : \omega_1 \to \alpha$ la funzione definita ponendo $f(\gamma) = \omega_1 \cdot \gamma$. Allora $f$ è strettamente crescente, ma *non* ha punti fissi. Infatti, per ogni $\gamma > 0$, si ha che $f(\gamma) > \gamma$, visto che $|f(\gamma)| = |\omega_1 \cdot \gamma| = \aleph_1$ mentre $|\gamma| \leq \aleph_0$.

---

[6] Ad esempio, per ogni funzione $f : \aleph_1 \to \aleph_1$ anche illimitata, $\sup_{\alpha<\aleph_1}|f(\alpha)| = \aleph_0 < \aleph_1$.

[7] Una funzione $f : \beta \to \alpha$ tra ordinali si dice *continua* se per ogni ordinale limite $\lambda < \beta$ si ha che $f(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\gamma)$.