Elementi di Logica Matematica
Quinto Appello - Prova scritta del 17 Febbraio 2010

Cognome e nome:..

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi, stabilendo tutte le eventuali uguaglianze o disuguaglianze che sussistono tra di loro.

1. $Y_1 = \{A \subset \omega_7 \mid A \text{ è finito}\}$
2. $Y_2 = \{A \subseteq \omega_7 \mid |A| = \aleph_7\}$.
3. $Y_3 = \{A \subseteq \omega_7 \mid |A| = \aleph_6\}$.
4. $Y_4 = \{f : \omega_6 \to \omega_7 \mid \mathrm{Imm}(f) \text{ è finita}\}$.
5. $Y_5 = \{f : \omega_7 \to \omega_6 \mid |\mathrm{Imm}(f)| = \aleph_6\}$.

Esercizio 2. Disporre in ordine crescente i seguenti 13 ordinali, stabilendo se sussistono eventuali uguaglianze.

$$(a)\ 17^{\omega},\quad (b)\ \omega,\quad (c)\ \omega^{\omega},\quad (d)\ \omega_1^{\omega},\quad (e)\ {\omega_1}^{\omega_1},\quad (f)\ \omega^{\omega_1},\quad (g)\ 17^{\omega_1},\quad (h)\ 13^{\omega},$$
$$(i)\ (\omega+\omega)^{\omega},\quad (l)\ (\omega_1+\omega_1)^{\omega},\quad (m)\ (\omega+\omega)^{\omega_1},\quad (n)\ (\omega_1+\omega_1)^{\omega_1},\quad (o)\ {\omega_1}^{(\omega+\omega)}.$$

Esercizio 3. Determinare tutti e soli gli ordinali α che soddisfano la seguente proprietà:

$$(\star)\quad \text{Per ogni } \gamma,\ \ \alpha^{\gamma} + \alpha^{\gamma+1} = \alpha^{\gamma+1}.$$

Esercizio 4. Dimostrare che queste due proprietà sono equivalenti:

1. $\kappa^{\operatorname{cof}\kappa} = \kappa^{+} \cdot 2^{\operatorname{cof}\kappa}$ per ogni cardinale infinito κ.
2. $\kappa^{\operatorname{cof}\kappa} = \kappa^{+}$ per ogni cardinale singolare κ con $\kappa > 2^{\operatorname{cof}\kappa}$.

Esercizio 5. Ricordiamo che un cardinale κ si dice *inaccessibile* se è *regolare*, ed inoltre è *limite forte*, cioè $\nu^{\mu} < \kappa$ per ogni $\nu, \mu < \kappa$.

1. Dimostrare che se κ è inaccessibile, allora $|V_\kappa| = \kappa$.[1]
2. Dimostrare che κ è inaccessibile se e solo se soddisfa la seguente proprietà:

$$(\star\star)\quad \big(f : A \to B\ \&\ A \in V_k\ \&\ B \subseteq V_\kappa\big)\ \Rightarrow\ f \in V_\kappa.$$

[1] V_κ è il κ-esimo livello V_κ della gerarchia di von Neumann:

$$V_0 = \emptyset,\ V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta),\ V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta \text{ se } \lambda \text{ è limite.}$$