Elementi di Logica Matematica
Terzo Appello - Prova scritta del 17 Settembre 2009

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia $\varepsilon_0 = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$, dove si pone induttivamente $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$.

1. Dimostrare che $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.
2. Dimostrare che ε_0 è il più piccolo ordinale α tale che $\omega^\alpha = \alpha$.

Esercizio 2. Determinare la cardinalità dei seguenti ordinali, dove l'esponenziazione deve intendersi tra ordinali:

$$(a)\ \omega^\omega\,;\quad (b)\ \omega^{\omega_1}\,;\quad (c)\ {\omega_1}^\omega\,;\quad (d)\ {\omega_1}^{\omega_1}\,;\quad (e)\ \omega^{\omega_2}\,;\quad (f)\ {\omega_1}^{\omega_2}\,;\quad (g)\ {\omega_2}^\omega\,;\quad (h)\ {\omega_2}^{\omega_1}\,;\quad (i)\ {\omega_2}^{\omega_2}$$

Esercizio 3. Assumiamo che valga l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ per ogni α. Determinare le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X = \{A \subseteq \omega_{17} \mid |A| = \aleph_{17}\}$
2. $Y_i = \{A \subseteq \omega_{17} \mid |A| = \aleph_i\}$ al variare di $i = 0, \dots, 16$.
3. $Z = \{f : \omega_{17} \to \omega_{13} \mid f$ è illimitata$\}$.
4. $W = \{f : \omega_{17} \to \omega_{17} \mid f$ è strettamente crescente e continua[1]$\}$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione-classe "*beth*":

$$\beth_0 = \aleph_0\,,\quad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}\,,\quad \beth_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.}$$

1. Dimostrare che la funzione *beth* ammette punti fissi arbitrariamente grandi, cioè che per ogni cardinale ν, esiste un cardinale $\kappa > \nu$ tale che $\beth_\kappa = \kappa$.
2. Dimostrare che per ogni ordinale $\alpha \geq \omega^2$ si ha che l'α-esimo insieme della gerarchia di von Neumann[2] ha cardinalità $|V_\alpha| = \beth_\alpha$.
3. Dimostrare che $|V_\alpha| = |\mathcal{P}(\alpha)|$ se e solo se vale uno dei seguenti tre casi:
(a) $\alpha = 4$; (b) $\alpha = \omega + 1$; (c) $\alpha = \kappa + 1$ dove κ è un punto fisso della funzione *beth*.

Esercizio 5.

1. Dimostrare in dettaglio che gli ordinali ξ tali che $\omega^\omega \cdot \xi = \xi$ sono tutti e soli i multipli di ω^{ω^2}, cioè quelli della forma $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \zeta$ per qualche ζ.
2. Più in generale, per ogni α, individuare tutti e soli gli ordinali ξ tali che $\omega^\alpha \cdot \xi = \xi$.

[1] Ricordiamo che una funzione f definita su un ordinale α si dice *continua* se per ogni ordinale limite $\lambda < \alpha$ si ha che $\sup_{\gamma<\lambda} f(\gamma) = f(\lambda)$.

[2] Ricordare che la *gerarchia di von Neumann* è definita per ricorsione transfinita ponendo: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, $V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\lambda$ se λ è limite.