Elementi di Logica Matematica
Primo Appello - Prova scritta del 11 Giugno 2009

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

(1) $Z_1 = [\omega_1]^{<\aleph_0} = \{A \subset \omega_1 \mid A \text{ è finito}\}$; (2) $Z_2 = [\omega_1]^{\aleph_0} = \{A \subseteq \omega_1 \mid |A| = \aleph_0\}$

(3) $Z_3 = [\omega_1]^{\aleph_1} = \{A \subseteq \omega_1 \mid |A| = \aleph_1\}$; (4) $Z_4 = \{f : \omega \to \omega_1 \mid f \text{ è strettamente crescente}\}$.

(5) $Z_5 = \{f : A \to \omega_1 \mid A \subset \omega_1 \text{ e } |A| = \aleph_0\}$.

Soluzioni. (1). Per ogni sottoinsieme finito di ω_1 con n elementi, poniamo $\varphi(\{\alpha_1 < \ldots < \alpha_n\}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in {\omega_1}^n = \omega_1 \times \ldots \times \omega_1$ (n volte). Se $n = 0$, conveniamo che ${\omega_1}^0 = 1 = \{0\}$, e poniamo $\varphi(\emptyset) = 0 \in {\omega_1}^0$. Risulta così definita una funzione biunivoca $\varphi : Z_1 \to \bigcup_{n\in\omega} {\omega_1}^n$. Visto che per ogni $n > 0$ si ha $|{\omega_1}^n| = {\aleph_1}^n = \aleph_1$, concludiamo che

$$|[\omega_1]^{<\aleph_0}| = |Z_1| = \sum_{n\in\omega} |{\omega_1}^n| = \max\{\aleph_1, \aleph_0\} = \aleph_1.$$

(2). Ad ogni $A \in Z_2$, associamo una bigezione $f_A : \omega \to A$.[1] Resta così definita una funzione $\varphi : Z_2 \to \mathrm{Fun}(\omega, \omega_1)$ dove $\varphi(A) = f_A$. Chiaramente φ è iniettiva, visto che $\mathrm{Imm}(f_A) = A$, e dunque

$$|Z_2| \leq |\mathrm{Fun}(\omega, \omega_1)| = {\aleph_1}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Viceversa, ricordiamo che $X = \{B \subseteq \omega \mid |B| = \aleph_0\}$ ha cardinalità $\mathfrak{c}$. Poiché $X \subset Z_2$, segue banalmente anche l'altra disuguaglianza $\mathfrak{c} \leq |Z_2|$.

(3). Intanto $Z_3 \subset \mathcal{P}(\omega_1)$, e dunque $|Z_3| \leq 2^{\aleph_1}$. Per ogni $A \subseteq \omega_1$, poniamo

$$\varphi(A) = \begin{cases} (A, 0) & \text{se } |A| = \aleph_1 \\ (A^c, 1) & \text{se } |A| < \aleph_1. \end{cases}$$

Notiamo che se $|A| < \aleph_1$, allora il suo complementare $A^c = \omega_1 \setminus A$ ha cardinalità $\aleph_1$. Dunque $\varphi : \mathcal{P}(\omega_1) \to Z_3 \times \{0, 1\}$. È immediato verificare che φ è iniettiva, e dunque vale anche l'altra disuguaglianza

$$2^{\aleph_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)| \leq |Z_3 \times \{0, 1\}| = |Z_3| \cdot 2 = |Z_3|.$$

La cardinalità di Z_3 può anche essere determinata osservando che $\mathcal{P}(\omega_1)$ è uguale alla unione disgiunta $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$. Allora

$$2^{\aleph_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)| = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| = \aleph_1 + \mathfrak{c} + |Z_3| = \max\{\mathfrak{c}, |Z_3|\}.$$

Per concludere $|Z_3| = 2^{\aleph_1}$, basta allora dimostrare che $\mathfrak{c} \leq |Z_3|$. Questo si può verificare ad esempio notando che la funzione $\psi : \mathcal{P}(\omega) \to Z_3$ dove $\psi(A) = A \cup (\omega_1 \setminus \omega)$, è iniettiva.

[1] Notiamo che – in generale – non esistono bigezioni *crescenti* $f_A : \omega \to A$. Ad esempio, $\omega + 1 \in Z_2$, ma non esistono bigezioni crescenti $f : \omega \to \omega + 1$, altrimenti i due ordinali $\omega \cong \omega + 1$ sarebbero isomorfi.

(4). Intanto $Z_4 \subset \mathrm{Fun}(\omega,\omega_1)$, dunque $|Z_4| \leq {\aleph_1}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Viceversa, la funzione $\varphi : Z_4 \to Z_2$ che associa ad ogni $f : \omega \to \omega_1$ strettamente crescente la propria immagine $\varphi(f) = \mathrm{Imm}(f)$, è iniettiva. Dunque, vale anche l'altra disuguaglianza $\mathfrak{c} \leq |Z_4|$.

(5). Se $A \neq B$, gli insiemi di funzioni $\mathrm{Fun}(A,\omega_1)$ e $\mathrm{Fun}(B,\omega_1)$ sono disgiunti. Valgono allora le seguenti uguaglianze:

$$|Z_5| = |\bigcup_{A\in Z_2} \mathrm{Fun}(A,\omega_1)| = \sum_{A\in Z_2} |\mathrm{Fun}(A,\omega_1)| = \sum_{A\in Z_2} {\aleph_1}^{|A|} = \sum_{A\in Z_2} {\aleph_1}^{\aleph_0} = {\aleph_1}^{\aleph_0} \cdot |Z_2| = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Esercizio 2.

1. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^2\cdot 5+\omega\cdot 4+1$ e $\omega\cdot 3+6$.

2. Trovare esempi di ordinali α tali che $n^\alpha = \alpha$ per ogni naturale $n > 1$.

3. Trovare esempi di ordinali α tali che ${\omega_1}^\alpha = \alpha$.

Soluzioni. (1). Notiamo che per ogni $n \in \omega$ positivo,

$$\begin{aligned}(\omega\cdot 3+6)\cdot n &= \underbrace{(\omega\cdot 3+6)+(\omega\cdot 3+6)+\ldots+(\omega\cdot 3+6)}_{n \text{ volte}} = \\ &= \omega\cdot 3+\underbrace{(6+\omega\cdot 3)+\ldots+(6+\omega\cdot 3)}_{n-1 \text{ volte}}+6 = \\ &= \underbrace{(\omega\cdot 3+\ldots+\omega\cdot 3)}_{n \text{ volte}}+6 \;=\; \omega\cdot 3n+6\end{aligned}$$

Visto che $\omega\cdot 3n < \omega\cdot 3n+6 = (\omega\cdot 3+6)\cdot n < \omega\cdot(3n+1)$, si ha $(\omega\cdot 3+6)\cdot\omega = \bigcup_{n\in\omega}(\omega\cdot 3+6)\cdot n = \omega\cdot\omega = \omega^2$. Segue allora che $(\omega\cdot 3+6)\cdot(\omega\cdot 5+1) = (\omega\cdot 3+6)\cdot\omega\cdot 5+(\omega\cdot 3+6) = \omega^2\cdot 5+\omega\cdot 3+6$. Notiamo infine che $(\omega^2\cdot 5+\omega\cdot 3+6)+(\omega+1) = \omega^2\cdot 5+\omega\cdot 3+(6+\omega)+1 = \omega^2\cdot 5+\omega\cdot 4+1$. Dunque $\omega\cdot 5+1$ è il quoziente della divisione richiesta, e $\omega+1 < \omega\cdot 3+6$ è il resto.

(2). Un primo esempio è $\alpha = \omega$, infatti $n^\omega = \bigcup_{k\in\omega} n^k = \omega$. Altri esempi si possono ottenere come limiti $\alpha = \bigcup_{k\in\omega}\alpha_k$ dove si pone induttivamente $\alpha_0 = \gamma$, $\alpha_{k+1} = n^{\alpha_k}$ (l'ordinale γ è qualunque). Se esiste k tale che $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, banalmente $\alpha = \alpha_k$ è l'esempio cercato. Altrimenti la sequenza $\langle \alpha_k \mid k\in\omega\rangle$ è strettamente crescente e α è un ordinale limite. Si ha dunque

$$n^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} n^\alpha = \bigcup_{k\in\omega} n^{\alpha_k} = \bigcup_{k\in\omega}\alpha_{k+1} = \alpha.$$

(3). Per ogni γ fissato, definiamo induttivamente la sequenza $\alpha_0 = \gamma$, $\alpha_{k+1} = {\omega_1}^{\alpha_k}$. In modo del tutto analogo a sopra, si dimostra che ${\omega_1}^\alpha = \alpha$.

Esercizio 3. Consideriamo la *gerarchia di von Neumann*: $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ è limite. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $B \subseteq A \in V_\alpha \Rightarrow B \in V_\alpha$.

2. $a \in A \in V_\alpha \Rightarrow a \in V_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$.

3. $\mathcal{F} \in V_\alpha \Rightarrow \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_\alpha$. Vale l'implicazione inversa?

4. $A \in V_\alpha \Leftrightarrow \mathrm{TC}(A) \in V_\alpha$.[2]

[2] Ricordare che la *chiusura transitiva* $\mathrm{TC}(A)$ è il più piccolo insieme transitivo che contiene A, ed è uguale all'unione $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ dove $A_0 = A$ e $A_{n+1} = \bigcup_{a\in A_n} a$.

5. $A \in V_\omega \Rightarrow |\mathrm{TC}(A)| < \aleph_0$. Inoltre, se A ben fondato, vale anche $|\mathrm{TC}(A)| < \aleph_0 \Rightarrow A \in V_\omega$.

6. Per quali ordinali finiti $n < \omega$ si ha $|V_n| \leq |\mathcal{P}(n)|$?

7. * Per ogni α, esiste ed unica funzione *rango* $\rho_\alpha : V_\alpha \to \alpha$ tale che

$$\rho_\alpha(\emptyset) = 0\,; \quad \rho_\alpha(A) = \sup\{\rho_\alpha(a) + 1 \mid a \in A\} \quad \text{se } A \neq \emptyset.$$

Soluzioni. (1). Per induzione transfinita su α. Il caso $\alpha = 0$ è vero a vuoto. Nel caso successore,

$$B \subseteq A \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow B \subseteq A \subseteq V_\alpha \Rightarrow B \subseteq V_\alpha \Rightarrow B \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}.$$

Nel caso α limite, $A \in V_\alpha \Rightarrow$ esiste $\beta < \alpha$ con $A \in V_\beta$. Allora, per ipotesi induttiva, $B \subseteq A \in V_\beta \Rightarrow B \in V_\beta \subset V_\alpha$.

(2). Per induzione su α. Il caso base $\alpha = 0$ è vero a vuoto. Se $a \in A \in V_{\alpha+1}$, allora $a \in A \subseteq V_\alpha \Rightarrow a \in V_\alpha$, cioè la tesi perché $\alpha < \alpha + 1$. Infine, se $a \in A \in V_\alpha$ dove α è limite, esiste $\beta < \alpha$ con $a \in A \in V_\beta$. Per ipotesi induttiva, esiste allora $\gamma < \beta$ con $a \in V_\gamma \subset V_\beta \subset V_\alpha$.

(3). Per induzione su α. Il caso $\alpha = 0$ è vero a vuoto. Supponiamo ora $\mathcal{F} \in V_{\alpha+1}$. Per ogni $F \in \mathcal{F}$, si ha $F \in \mathcal{F} \subseteq V_\alpha \Rightarrow F \in V_\alpha$. Visto che V_α è transitivo, da $F \in V_\alpha$ segue che $F \subseteq V_\alpha$. Abbiamo così che $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \subseteq V_\alpha \Rightarrow \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_{\alpha+1}$, come voluto. Infine, se $\mathcal{F} \in V_\alpha$ dove α è limite, esiste $\beta < \alpha$ con $\mathcal{F} \in V_\beta$. Allora, per ipotesi induttiva, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_\beta \subset V_\alpha$.

L'implicazione inversa $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_\alpha \Rightarrow \mathcal{F} \in V_\alpha$ non vale in generale. Ad esempio, sia $\mathcal{F} = n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$ un qualunque naturale di von Neumann positivo. Allora $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = 0 \cup 1 \cup \ldots \cup n = n \in V_{n+1}$, mentre $\mathcal{F} = n + 1 \notin V_{n+1}$.

(4). $\Leftarrow$ Basta notare che $A \subseteq \mathrm{TC}(A) \in V_\alpha$ implica $A \in V_\alpha$, per la proprietà (1) di sopra.

$\Rightarrow$ Per induzione su α. Il caso base è vero a vuoto. Inoltre, $A \in V_{\alpha+1} \Leftrightarrow A \subseteq V_\alpha$. Visto che V_α è transitivo, e che $\mathrm{TC}(A)$ è il più piccolo insieme transitivo che include A, segue allora che $TC(A) \subseteq V_\alpha$, e quindi $\mathrm{TC}(A) \in V_{\alpha+1}$. Il caso limite segue in modo diretto dall'ipotesi induttiva.

(5). $\Rightarrow$ Se $A \in V_\omega$, allora $A \in V_n$ per qualche $n < \omega$. Visto che V_n è transitivo, si ha $\mathrm{TC}(A) \subseteq V_n \Rightarrow |\mathrm{TC}(A)| \leq |V_n| < \aleph_0$. Ricordiamo infatti che tutti i livelli finiti V_n della gerarchia di von Neumann, sono insiemi finiti.

$\Leftarrow$ Notiamo anzitutto che:

$$(\#) \quad \text{Se } X \text{ è un insieme finito e } X \subseteq V_\omega, \text{ allora } X \in V_\omega.$$

Verifichiamo quest'ultima proprietà. Sia $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq V_\omega$, e siano $n_i < \omega$ tali che $x_i \in V_{n_i}$. Se $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, allora $X \subseteq V_n \Rightarrow X \in V_{n+1} \subset V_\omega$.

Sia ora $\mathrm{TC}(A)$ finito, e supponiamo per assurdo che $A \notin V_\omega$. Visto che $A \subseteq \mathrm{TC}(A)$, anche A è finito, e dalla (#) segue allora che deve esistere almeno un elemento $a_1 \in A$ con $a_1 \notin V_\omega$. Ma $a_1 \subseteq \bigcup_{a\in A} a \subseteq \mathrm{TC}(A)$, e dunque anche a_1 è finito. Di nuovo per la (#), deve esistere $a_2 \in a_1$ tale che $a_2 \notin V_\omega$. Iterando questo procedimento, otteniamo una catena discentente $A \ni a_1 \ni a_2 \ni \ldots$, contro la ben fondatezza di A.

(6). Ricordiamo che $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \mathcal{P}(V_0) = \{\emptyset\}$, $V_2 = \mathcal{P}(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e dunque

$$|V_0| = 0 < 1 = |\mathcal{P}(0)|,\; |V_1| = 1 < 2 = |\mathcal{P}(1)| \text{ e } |V_2| = 2 < 4 = |\mathcal{P}(2)|.$$

Inoltre,

$$|V_3| = |\mathcal{P}(V_2)| = 2^2 = 4 < 8 = 2^3 = |\mathcal{P}(3)| \text{ e } |V_4| = |\mathcal{P}(V_3)| = 2^4 = |\mathcal{P}(4)|.$$

Si dimostra poi facilmente per induzione che $|V_n| > |\mathcal{P}(n)|$ per ogni $n \geq 5$. Infatti, $|V_5| = 2^{|V_4|} = 2^{16} > 2^5 = |\mathcal{P}(5)|$ e, induttivamente,

$$|V_{k+1}| = 2^{|V_k|} > 2^{|\mathcal{P}(k)|} = 2^{(2^k)} > 2^{k+1} = |\mathcal{P}(k+1)|.$$

(7). Ci occorre la seguente proprietà:

$$(\star)\quad \text{Se } x \in V_\xi, \text{ allora esiste } \zeta < \xi \text{ con } x \subseteq V_\zeta.$$

Infatti, la base di induzione $\xi = 0$ è vera a vuoto. Se $\xi = \xi' + 1$ è un successore, per definizione $x \in V_{\xi'+1} \Leftrightarrow x \subseteq V_{\xi'}$. Infine, il caso ξ limite è immediato per ipotesi induttiva.

Esistenza. Per ogni $A \in V_\alpha$, definiamo

$$\rho_\alpha(A) = \min\{\beta \mid A \subseteq V_\beta\}.$$

Per la $(\star)$, $A \in V_\alpha \Rightarrow A \subseteq V_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$, e dunque $\rho_\alpha(A) \leq \beta < \alpha$. Abbiamo così verificato che la funzione $\rho_\alpha : V_\alpha \to \alpha$. Chiaramente $\rho_\alpha(\emptyset) = 0$. Sia ora $\beta = \rho_\alpha(A)$. Ogni $a \in A \subseteq V_\beta$ è tale che $a \in V_\beta$ e quindi, per la $(\star)$, esiste $\gamma < \beta$ con $\rho_\alpha(a) \leq \gamma < \beta$. Quindi $\sup\{\rho_\alpha(a) + 1 \mid a \in A\} \leq \beta$. Se per assurdo fosse $\delta = \sup\{\rho_\alpha(a) + 1 \mid a \in A\} < \beta$, allora per ogni $a \in A$ si avrebbe $a \subseteq V_{\rho_\alpha(a)} \Rightarrow a \in V_{\rho_\alpha(a)+1} \subseteq V_\delta$, e quindi $A \subseteq V_\delta$, contro la minimalità di $\rho_\alpha(A) = \beta > \delta$.

Unicità. Per assurdo, siano $\rho \neq \rho'$ due funzioni rango su V_α. Consideriamo il minimo rango ρ di un insieme che testimonia $\rho \neq \rho'$, cioè sia $\beta = \min\{\rho(A) \mid \rho(A) \neq \rho'(A)\}$, e fissiamo B con $\rho(B) = \beta$. Per ogni $b \in B$, è facile verificare che $\rho(b) < \rho(B)$ e allora, vista la minimalità di β, deve essere $\rho(b) = \rho'(b)$. Concludiamo così che $\rho(B) = \sup\{\rho(b) + 1 \mid b \in B\} = \sup\{\rho'(b) \mid a \in B\} = \rho'(B)$, contro l'assunzione $\rho(B) \neq \rho'(B)$.

Esercizio 4. Dimostrare in dettaglio che un insieme totalmente ordinato $(A, <)$ ha tutti i suoi segmenti iniziali propri finiti se e solo se è isomorfo ad un ordinale $\alpha \leq \omega$.

Soluzione. $\Leftarrow$ Sia $\varphi : \alpha \to A$ un isomorfismo di insiemi ordinati, dove $\alpha \leq \omega$. Per le proprietà di isomorfismo, tutti e soli i segmenti iniziali propri di A sono gli insiemi $\varphi[S] = \{\varphi(s) \mid s \in S\}$, al variare di S segmento iniziale proprio di α. Ma tutti i segmenti iniziali propri di $\alpha \leq \omega$ sono naturali di von Neumann $S = n$, dunque sono finiti. Visto che φ è una bigezione, concludiamo che anche tutti gli insiemi $\varphi[S]$ sono finiti.

$\Rightarrow$ Notiamo anzitutto che $(A, <)$ è bene ordinato. Infatti, se per assurdo esistesse una catena discendente di suoi elementi $a > a_1 > a_2 > \dots$, allora il segmento iniziale proprio $A_a \supseteq \{a_1, a_2, \dots\}$ sarebbe infinito, contro l'ipotesi. Un modo alternativo per dimostrare il buon ordine è il seguente. Dato $X \subseteq A$ sottoinsieme non vuoto, prendiamo $x \in X$ e consideriamo $Y = \{x\} \cap A_x$. Visto che il segmento iniziale proprio A_x è finito, anche Y è finito. Esiste allora $\min Y = \xi$ (si dimostra facilmente per induzione che ogni sottoinsieme finito non vuoto di un insieme totalmente ordinato ha massimo e minimo). Si può verificare infine che $\xi = \min X$.

Visto che $(A, <)$ è bene ordinato, esiste ed unico ordinale α ad esso isomorfo. Non può essere $\alpha > \omega$, altrimenti ω sarebbe un segmento iniziale proprio infinito. Per la confrontabilità degli ordinali, deve essere allora $(A, <) \cong \alpha \leq \omega$, come voluto.