Elementi di Logica Matematica
Prova scritta di 16 Luglio 2008

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è iniettiva}\}$.
2. $X_2 = \mathcal{P}(\mathbb{R})/\equiv$, l'insieme quoziente delle parti di $\mathbb{R}$ modulo la relazione di equivalenza:
$$A \equiv B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ è finito.}$$
3. $X_3 = \{A \subseteq \aleph_{17} \mid |A| = \aleph_0\}$.

Esercizio 2. Trovare tutti gli ordinali β tali che $\beta + \omega^2 + 7 = \omega^2 + 7 + \beta$.

Esercizio 3. In ZF, dimostrare che le seguenti formulazioni dell'*assioma di scelta* sono tra loro equivalenti:

1. Per ogni famiglia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ di insiemi non vuoti, esiste una *funzione di scelta* Φ tale che $\Phi(F) \in F$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.
2. Per ogni famiglia $\mathcal{G} \neq \emptyset$ di insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un *insieme di scelta* X tale che $|X \cap G| = 1$ per ogni $G \in \mathcal{G}$.
3. Per ogni funzione suriettiva $f : A \to B$ esiste una funzione iniettiva $g : B \to A$ tale che $f \circ g = 1_B$ è la funzione identità su B.

Esercizio 4. Ricordiamo la *gerarchia cumulativa* di Von Neumann:
$$V_0 = \emptyset\,; \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)\,; \quad V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \ \text{ se } \lambda \text{ è limite.}$$
Siano κ un cardinale infinito e α un ordinale. Dimostrare che le seguenti due proprietà sono equivalenti:

1. $\mathrm{cof}(\alpha) > \kappa$;
2. Ogni $X \subseteq V_\alpha$ di cardinalità $|X| \leq \kappa$, appartiene a V_α.

Esercizio 5. Dimostrare le due seguenti proprietà:

1. Siano μ, κ due cardinali infiniti. Se $\mu \geq \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\kappa^\mu = (\sup_{\nu<\kappa} \nu^\mu)^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.
2. $(\aleph_\omega)^{\aleph_1} = \max\{(\aleph_\omega)^{\aleph_0}, 2^{\aleph_1}\}$. [*Suggerimento: Usare (1) per dimostrare (2).*]