Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 2 Marzo 2007

Cognome e nome: ..........................................................................................

E-mail (per eventuali comunicazioni): ...............................................................

**Tutte le risposte devono essere giustificate**

Buon lavoro!

**Esercizio 1.** Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $A_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |\text{Immagine}(f)| < \aleph_0\}$, cioè l'insieme di tutte le funzioni reali che assumono solo un numero finito di valori.
2. $A_2 = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sup_n \sigma(n) = +\infty\}$, cioè l'insieme delle successioni di numeri reali superiormente illimitate.
3. $A_3 = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$ dove $X$ è uno spazio topologico separabile (cioè $X$ ha un sottospazio numerabile denso).
4. $\mathcal{BO}(\mathbb{R}) = \{X \subset \mathbb{R} \mid (X, <) \text{ bene ordinato}\}$ [L'ordinamento sui sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}$ è quello indotto da $\mathbb{R}$.]

**Esercizio 2.** L'*esponenziale* $\gamma^\alpha$ tra ordinali (dove $\gamma \neq 0$) si definiva ponendo per ricorsione transfinita: $\gamma^0 = 1$, $\gamma^{\alpha+1} = \gamma^\alpha \cdot \gamma$, e $\gamma^\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \gamma^\alpha$ se $\lambda$ è limite. Per induzione transfinita dimostrare che:

1. Per ogni $\xi, \eta$ si ha $\gamma^\xi \cdot \gamma^\eta = \gamma^{\xi+\eta}$.
2. Per ogni $\xi, \eta$ si ha $(\gamma^\xi)^\eta = \gamma^{\xi\cdot\eta}$.

**Esercizio 3.**

1. Determinare tutte le coppie $(\alpha, \beta)$ di ordinali $\alpha, \beta < \omega^2$ e tali che $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
2. Determinare tutti gli ordinali $\alpha$ tali che $\alpha \cdot \omega^3 = \omega^3 \cdot \alpha$.

**Esercizio 4.** La successione *"beth"* è definita per induzione transfinita ponendo $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, e $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ se $\lambda$ è limite. Dimostrare che la seguente proprietà $(\star)$ vale se e solo se $\beth_\omega = \aleph_\omega$.

$$(\star) \qquad \text{Per ogni cardinale } \kappa, \quad \kappa < \aleph_\omega \ \Rightarrow\ 2^\kappa < \aleph_\omega$$

**Esercizio 5.**

1. Dimostrare che $(\aleph_1)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$;
2. Dimostrare che per ogni ordinale $\alpha$ si ha $(\aleph_{\alpha+1})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.
3. Assumendo l'*ipotesi del continuo* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, dimostrare che $(\aleph_n)^{\aleph_0} = \aleph_n$ per ogni naturale $n > 0$.