Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 8 Settembre 2006

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $A_1 = \{f : A \to \mathbb{N} \mid A \subseteq \mathbb{N} \text{ infinito } \}$, cioè l'insieme di tutte le funzioni con valori numeri naturali, e definite su sottoinsiemi infiniti di naturali.
2. $A_2 = \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid |A| = |\mathbb{Q} \setminus A| = \aleph_0\}$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ che sono infiniti con complementare infinito.
3. $A_3 = \{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid |\mathcal{X}| = \aleph_0 \text{ e } \forall X \in \mathcal{X} \quad |X| < \aleph_0\}$, l'insieme di tutti i sottoinsiemi numerabili di sottoinsiemi finiti di numeri reali.
4. $A_4 = \{\mathcal{X} \mid X \cap X' = \emptyset \text{ per ogni } X \neq X' \text{ in } \mathcal{X}\,, \bigcup \mathcal{X} = \mathbb{R}\,, \text{ e } |\mathcal{X}| = \aleph_0\}$, cioè l'insieme di tutte le partizioni numerabili di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.

1. Determinare tutte le coppie di ordinali (α, β) con $\alpha, \beta < \omega^2$ tali che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. Trovare esempi di ordinali $\alpha, \beta > \omega^2$ tali che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ma $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$.

Esercizio 3. Stabilire quali tra i seguenti 14 cardinali sono uguali tra loro:[1]

$$(1)\ {\aleph_0}^{\aleph_1};\quad (2)\ 2^{\mathfrak{c}};\quad (3)\ \aleph_1;\quad (4)\ {\aleph_0}^{\mathfrak{c}};\quad (5)\ \mathfrak{c};\quad (6)\ {\aleph_1}^{\aleph_0};\quad (7)\ \mathfrak{c}^{\aleph_1};$$

$$(8)\ 2^{\aleph_1};\quad (9)\ {\aleph_1}^{\mathfrak{c}};\quad (10)\ 2^{\aleph_0};\quad (11)\ \mathfrak{c}^{\aleph_0};\quad (12)\ {\aleph_1}^{\aleph_1};\quad (13)\ {\aleph_0}^{\aleph_0};\quad (14)\ \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$$

Esercizio 4. Dimostrare in dettaglio all'interno della teoria ZF che tutti gli insiemi totalmente ordinati finiti sono bene ordinati.

Esercizio 5. Sia κ un cardinale infinito, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $f : \kappa^+ \to \kappa^+$ avente cardinalità $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Dimostrare che esiste un ordinale α con $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ tale che $f(\beta) < \alpha$ per ogni $\beta < \alpha$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.[2]

---

[1] Con $\mathfrak{c}$ si denota la cardinalità del continuo $\mathbb{R}$.

[2] Con κ^+ si denota il più piccolo cardinale maggiore di κ.