Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 17 Luglio 2006

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $A_1 = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$, cioè l'insieme di tutte le sequenze finite di 0 e 1 (*sequenze binarie finite*).
2. $A_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid |\text{Immagine}(f)| < \aleph_0\}$, cioè l'insieme di tutte le successioni $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ di numeri naturali che assumono solo un numero finito di valori.
3. $A_3 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbb{N}^\alpha$, cioè l'insieme di tutte le sequenze di numeri naturali $\langle a_i \mid i < \alpha\rangle$ la cui "lunghezza" è un ordinale numerabile α.

Esercizio 2. Dimostrare che la seguente proprietà $(\star)$ è equivalente all'assioma di scelta.
$(\star)$ Per ogni $f : B \to A$ suriettiva esiste $g : A \to B$ iniettiva tale che $f \circ g : A \to A$ è l'identità.

Esercizio 3. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 4 + 5$ e $\omega \cdot 2 + 3$.

Esercizio 4. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali tale che il complementare $\mathbb{R} \setminus X$ è al più numerabile.

1. Senza usare l'assioma di scelta, dimostrare che $|X| = |\mathbb{R}|$.
2. Dimostrare che X è *separabile*, cioè ammette un sottoinsieme denso numerabile.[1]

Esercizio 5. Definiamo per ricorsione transfinita la seguente sequenza *"beth"* di cardinali:

$$\begin{cases} \beth_0 = \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\lambda = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \quad \text{se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che $cof(\beth_\lambda) = cof(\lambda)$ per ogni ordinale limite $\lambda > 0$.
2. Dimostrare che un cardinale $\kappa > \aleph_0$ è *limite forte* (cioè soddisfa la proprietà $\nu^\mu < \kappa$ per ogni $\nu, \mu < \kappa$) se e solo se $\kappa = \beth_\lambda$ dove $\lambda > 0$ è limite.

[1] Ricordare che un sottoinsieme $D \subseteq X$ è denso se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno I di x, si ha $I \cap D \neq \emptyset$.