

Elementi di Logica Matematica
Terzo Test del 27 Maggio 2005

Cognome e nome:

Numero di matricola:

E-mail (per eventuali comunicazioni):

Tutte le risposte devono essere giustificate.
Buon lavoro.

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni insieme $A \neq \emptyset$, la classe $\{B \mid |B| = |A|\}$ non è un insieme.

Esercizio 2. La gerarchia di von Neumann è definita per ricorsione transfinita ponendo:

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset; \\ V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha); \\ V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Dimostrare che:

1. Ogni V_α è transitivo, cioè $\forall x \forall y (x \in y \in V_\alpha \Rightarrow x \in V_\alpha)$;
2. Se $\alpha \leq \beta$ allora $V_\alpha \subseteq V_\beta$;
3. Se $\alpha < \beta$ allora $V_\alpha \in V_\beta$.

Esercizio 3.

1. Mettere in ordine i seguenti sei ordinali:

1) $\omega^\omega \cdot (\omega + \omega)$; 2) $(\omega + \omega) \cdot \omega^\omega$; 3) $\omega^\omega \cdot \omega + \omega^\omega \cdot \omega$; 4) $\omega \cdot \omega^\omega + \omega \cdot \omega^\omega$; 5) $\omega^\omega \cdot \omega + \omega \cdot \omega^\omega$; 6) $\omega \cdot \omega^\omega + \omega^\omega \cdot \omega$.

2. Dimostrare che se $\alpha < \beta$, allora $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$.

Esercizio 4. Usando la disuguaglianza di König, dimostrare che per ogni cardinale κ , si ha $\kappa < \kappa^{\text{cof}(\kappa)}$.

Esercizio 5. Sia $\alpha > 0$ un ordinale. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. α è additivamente chiuso, cioè se $\beta, \gamma < \alpha$ allora anche $\beta + \gamma < \alpha$;
2. Per ogni $\beta < \alpha$, $\beta + \alpha = \alpha$;
3. Esiste δ tale che $\alpha = \omega^\delta$.

Esercizio 6. Dimostrare che $\prod_{n \in \omega} \aleph_n = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.