Analisi Matematica
Prova scritta parziale n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

19 dicembre 2019

1. Si consideri la seguente serie dipendente dai parametri $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$.

$$\sum_k \frac{1 - x^k \cdot \ln k}{k \cdot (\ln k)^\alpha}.$$

Al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza semplice e assoluta:

(a) per $|x| > 1$;

(b) per $|x| < 1$;

(c) per $x = 1$;

(d) per $x = -1$.

Soluzione. Sia $a_k = \frac{1-x^k \cdot \ln k}{k \cdot (\ln k)^\alpha}$.

(a) Se $|x| > 1$ il termine a_k non tende a zero dunque la serie non converge per nessun α.

(b) se $|x| < 1$ per $k \geq \bar{k}$ si ha

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} < a_k < \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$$

dunque c'è convergenza assoluta e semplice se e solo se $\alpha > 1$.

(c) Se $x = 1$

$$a_k = \frac{1 - \ln k}{k(\ln k)^\alpha}$$

da cui

$$-\frac{\ln k}{k(\ln k)^\alpha} < a_k < -\frac{1}{2}\frac{\ln k}{k(\ln k)^\alpha} \qquad \text{per ogni } k \geq \bar{k}$$

dunque c'è convergenza assoluta e semplice se e solo se $\alpha > 2$

(d) Se $x = -1$ si ha

$$a_k = \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} - \frac{(-1)^k \ln k}{k(\ln k)^\alpha}.$$

se $\alpha > 2$ c'è convergenza assoluta.

Se $1 < \alpha \leq 2$ la serie con il primo addendo converge, la serie con il secondo addendo converge ma non assolutamente quindi la serie originale converge semplicemente.

Se $0 < \alpha \leq 1$ la serie con il primo addendo diverge a $+\infty$ la serie con il secondo addendo converge per Leibniz e dunque la serie originale diverge.

$\square$

2. Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k \cdot (\sqrt{k} - 2)}{\sqrt{k!}}.$$

(a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente;

(b) calcolare la somma della serie per $x = 2$.

Soluzione. Posto $a_k = \frac{x^k \cdot (\sqrt{k}-2)}{\sqrt{k!}}$ si ha

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot \frac{\sqrt{k+1} - 2}{\sqrt{k} - 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} \to 0 \qquad \forall x$$

dunque la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $x = 2$ si ha

$$a_k = \frac{2^k(\sqrt{k} - 2)}{\sqrt{k!}} = \frac{2^k}{\sqrt{(k-1)!}} - \frac{2^{k+1}}{\sqrt{k!}}$$

dunque

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^k}{\sqrt{(k-1)!}} - \frac{2^{k+1}}{\sqrt{k!}} \right) = 2 - \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$$

e, per $n \to +\infty$, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2.$$

$\square$

3. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare (se esiste) il limite della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, \\ a_{n+1} = 4a_n - 3a_n^2 - \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Soluzione. Se la successione converge l'eventuale limite L deve soddisfare:

$$L = 4L - 3L^2 - \frac{2}{3} \qquad \text{ovvero} \qquad 3L^2 - 3L + \frac{2}{3} = 0$$

da cui $L = \frac{1}{3}$ o $L = \frac{2}{3}$. I possibili limiti sono dunque $L = -\infty, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.
Se $\alpha = \frac{1}{3}$ oppure $\alpha = \frac{2}{3}$ si ha $a_n = \alpha$ per ogni n dunque si ha $a_n \to \alpha$.
Vediamo se la successione può essere crescente.

$$a_{n+1} > a_n \iff 3a_n^2 - 3a_n + \frac{2}{3} < 0 \iff \frac{1}{3} < a_n < \frac{2}{3}.$$

Quindi se $\alpha < \frac{1}{3}$ si ha $a_n < \frac{1}{3}$ per ogni n, a_n decrescente e quindi $a_n \to -\infty$.
Osserviamo che qualunque sia α per ogni $n \geq 1$ si ha $a_n \leq \frac{2}{3}$ in quanto

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_n^2 - \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3} \iff (3a_n - 2)^2 \geq 0.$$

Quindi se $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ si ha $a_n < \frac{2}{3}$ per ogni n, a_n crescente, $a_n \to \frac{2}{3}$.
Se ora $\alpha > \frac{2}{3}$ si ha $a_1 < \frac{2}{3}$. Mi chiedo se a_1 è maggiore o minore di $\frac{1}{3}$:

$$a_1 = 4a_0 - 3a_0^2 - \frac{2}{3} > \frac{1}{3} \iff 3a_0^2 - 4a_0 + 1 < 0 \iff \frac{1}{3} < a_0 < 1.$$

Quindi se $\frac{2}{3} < \alpha < 1$ si ha $\frac{1}{3} < a_1$ (e $a_1 < \frac{2}{3}$) dunque a_n è crescente per $n \geq 1$ e $a_n \to \frac{2}{3}$. Se $\alpha > 1$ allora $a_1 < \frac{1}{3}$ dunque a_n è decrescente e $a_n \to -\infty$. Se $\alpha = 1$ allora $a_1 = \frac{1}{3}$ dunque $a_n = \frac{1}{3}$ per ogni $n \geq 1$ e $a_n \to \frac{1}{3}$. Se $\alpha = \frac{2}{3}$ allora $a_n = \frac{2}{3}$ per ogni n (come già visto). $\square$