

Analisi Matematica A e B

Soluzioni prova scritta n. 5

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

13 gennaio 2020

1. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) + \ln(e^x - x) - \frac{1}{6} \arctan(x^3)}{x^2 - \sin^2 x}$$

Soluzione. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\ln t = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(e^x - x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} t &= t + o(t^2) \\ \operatorname{arctg}(x^3) &= x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\cos x) + \ln(e^x - x) - \frac{1}{6} \arctan(x^3)}{x^2 - \sin^2 x} &= \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{3} + o(x^4)} \\ &= \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} \rightarrow -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

2. Data l'equazione differenziale

$$u'(x) + \frac{u(x)}{x} = x^2$$

scrivere le soluzioni definite su $(0, +\infty)$ e calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, se esiste, il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x^\alpha}$$

Dimostrazione. Osservando che per $x > 0$ si ha $e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$ moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per il fattore integrante x :

$$xu' + u = x^3$$

cioè

$$(xu)' = x^3$$

da cui, integrando,

$$xu = \frac{x^4}{4} + c$$

ovvero

$$u(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}.$$

Alternativamente, si risolve prima l'equazione omogenea

$$u'(x) = -\frac{u(x)}{x}$$

da cui integrando si ottiene:

$$\ln u(x) = -\ln x + c$$

cioè

$$u(x) = \frac{c}{x}.$$

Risolviamo ora la non omogenea con il metodo della variazione della costante arbitraria. Cerchiamo cioè una soluzione della non omogenea della forma

$$v(x) = \frac{a(x)}{x}$$

Si ha allora:

$$v'(x) + \frac{v(x)}{x} = \frac{a'(x)}{x} - \frac{a(x)}{x^2} + \frac{a(x)}{x^2} = x^2$$

e quindi

$$a'(x) = x^3, \quad a(x) = \frac{x^4}{4}.$$

Si ritrova quindi:

$$u(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}.$$

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha quindi

$$\frac{u(x)}{x^\alpha} = \frac{x^{3-\alpha}}{4} + \frac{c}{x^{\alpha+1}} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } \alpha = 3, \\ 0 & \text{se } \alpha > 3, \\ +\infty & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

□

3. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cdot (n!)^3 \cdot \ln n}{(3n)!}$$

studiarne, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e semplice.

Soluzione. Posto

$$a_n = \frac{x^n}{(n!)^3 \ln n} (3n)!$$

risulta

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x| (n+1)^3 \ln(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3) \ln n} \rightarrow \frac{|x|}{27}.$$

Dunque, per il criterio del rapporto, la serie converge assolutamente se $|x| < 27$ e non converge, neanche semplicemente se $|x| > 27$ (in quanto a_n non è infinitesimo). Se $|x| = 27$ si osserva che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{9(n+1)^2 \ln(n+1)}{(3n+1)(3n+2) \ln n} > \frac{9n^2 + 18n + 9}{9n^2 + 9n + 2} > 1.$$

Dunque $|a_{n+1}| > |a_n|$ e la successione $|a_n|$ è quindi strettamente crescente e non può tendere a zero. Dunque a_n non tende a zero e, mancando la condizione necessaria per la convergenza, possiamo affermare che la serie non converge neanche semplicemente. \square