Soluzioni quarto compitino analisi matematica

04 maggio 2018

Esercizio 1. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - y \sin x = \sin(2x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $E(y) = y' - y \sin x$ e risolviamo $E(y) = 0$ ossia

$$\frac{y'}{y} = \sin x$$

che diventa

$$\ln|y(x)| = -\cos x + \widehat{c}$$

e quindi

$$y(x) = e^{-\cos x} \cdot c$$

è la soluzione generale dell'equazione omogenea.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $E(y) = \sin 2x$ della forma $y(x) = C(x)e^{-\cos x}$. Questa dovrà soddisfare la seguente equazionee:

$$C'(x) = \sin 2x e^{\cos x} = 2 \sin x \cos x e^{\cos x}.$$

Calcoliamo quindi $C(x)$ che viene

$$C(x) = 2 \int \sin x \cos x e^{\cos x} dx,$$

attuando la sostituzione $t = \cos x$ (e quindi $dt = -\sin x dx$), otteniamo

$$C(x) = -2 \int te^t dt = -2(te^t - e^t) + C = -2(\cos x e^{\cos x} - e^{\cos x}) + C$$

dove per il calcolo dell'integrale si è utilizzata la formula di integrazione per parti.

In conclusione le soluzioni di $E(y) = \sin 2x$ sono

$$y(x) = (C(x) + C)e^{-\cos x} = -2 \cos x + 2 + Ce^{-\cos x}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ otteniamo $Ce^{-1} = 1$ ossia $C = e$. In conclusione la soluzione al problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{1-\cos x} + 2(1 - \cos x).$$

□

Esercizio 2. *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{2e^{3x}}{e^x + 1} + 2\sin x.$$

Dimostrazione. Sia $E(y) = y'' - 4y' + 3y$. Il polinomio $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$ ha come radici 1 e 3 e quindi le soluzioni di $E(y) = 0$ sono

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $E(y) = 2\sin x$ della forma $\bar{y} = \alpha \sin x + \beta \cos x$. Sostituendo otteniamo

$$E(\bar{y}) = (-\alpha \sin x - \beta \cos x - 4\alpha \cos x + 4\beta \sin x + 3\alpha \sin x + 3\beta \cos x) =$$

$$= (-\alpha + 4\beta + 3\alpha)\sin x + (-\beta - 4\alpha + 3\beta)\cos x = 2\sin x.$$

Da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \beta - 2\alpha = 0 \end{cases}$$

che è risolto da $\alpha = 1/5$ e $\beta = 2/5$, ossia la soluzione particolare di $E(y) = 2\sin x$ è $1/5 \sin x + 2/5 \cos x$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare, usando il metodo della variazione delle costanti, di $E(\tilde{y}) = \frac{2e^{3x}}{e^x+1}$ della forma

$$\tilde{y} = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{3x}.$$

Imponiamo quindi

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{3x} = 0 \\ c_1' e^x + 3c_2' e^{3x} = \frac{2e^{3x}}{e^x+1} \end{cases}$$

ottenendo

$$2c_2' e^{3x} = \frac{2e^{3x}}{e^x + 1}$$

ossia

$$c_2' = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Calcoliamo ora l'integrale attuando una sostituzione $t = e^x$ (e quindi $dt = e^x dx$ ossia $dx = 1/tdt$)

$$c_2(x) = \int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t+1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| = \ln \frac{e^x}{e^x+1}.$$

Da cui ricaviamo

$$c_1'(x) = -c_2'(x)e^{2x} = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

e, con la stessa sostituzione di prima, abbiamo che

$$c_1(x) = \int -\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\int \frac{e^x e^x}{e^x+1}dx = -\int \frac{t}{t+1}dt =$$

$$-\int \frac{t+1}{t+1}dt + \int \frac{1}{t+1}dt = -t + \ln|t+1| = -e^x + \ln(e^x+1).$$

Mettendo tutto insieme abbaimo che una soluzione generale di

$$E(y) = \frac{2e^{3x}}{e^x+1} + 2\sin x$$

è data da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + (\ln(e^x+1) - e^x)e^x + \ln\frac{e^x}{e^x+1}e^{3x}.$$

□

Esercizio 3. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \frac{3x^2\sqrt{1-y^4}}{2y} \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

trovarne la soluzione verificando il massimo intervallo di esistenza.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che deve essere $|y| \leq 1$ e $y \neq 0$: poiché $y(0) > 0$, dovrà essere $0 < y \leq 1$. Inoltre notiamo che $y = 1$ è una soluzione costante del problema. Infine $y'(x)$ è positiva dove è definita.

Esplicitando abbiamo

$$\frac{2yy'}{\sqrt{1-y^4}} = 3x^2$$

e integrando si ottiene

$$\arcsin(y^2(x)) = x^3 + c.$$

Imponendo $y(0) = 1/\sqrt{2}$ troviamo il valore della costante c. Otteniamo

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = c$$

da cui $c = \pi/6$. La nostra soluzione diventa quindi

$$y^2(x) = \sin\left(x^3 + \frac{\pi}{6}\right).$$

Innanzitutto bisogna imporre $\sin\left(x^3 + \frac{\pi}{6}\right) > 0$ per x in un intorno di 0. Quindi abbiamo

$$0 < x^3 + \frac{\pi}{6} < \pi$$

ossia

$$-\frac{\pi}{6} < x^3 < \frac{5\pi}{6}.$$

Ma è anche necessario che $x^3 + \frac{\pi}{6}$ sia crescente e quindi

$$0 < x^3 + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$

ossia

$$-\frac{\pi}{6} < x^3 \leq \frac{\pi}{3}.$$

La soluzione è quindi

$$y(x) = \sqrt{\sin\left(x^3 + \frac{\pi}{6}\right)},$$

per

$$-\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}} < x \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Quando

$$x \to -\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

si ha che $y \to 0$ e quindi $y' \to +\infty$ il che implica che la funzione non si prolunga. Quando invece

$$x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

si ha che $y \to 1$ e quindi $y' \to 0$, perciò la soluzione si prolunga col valore costante 1. In conclusione la soluzione è data da

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin\left(x^3 + \frac{\pi}{6}\right)} & \text{se } -\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}} < x \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ 1 & \text{se} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} < x < +\infty. \end{cases}$$

□