Soluzioni terzo compitino analisi matematica

23 marzo 2018

Esercizio 1. *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} \int_{x-\sin x}^{x+\sin x} (\cos t) \ln(1+t) dt.$$

Dimostrazione. Sia

$$F(x) = \int_{x-\sin x}^{x+\sin x} (\cos t) \ln(1+t) dt,$$

notiamo subito che F è una funzione C^1 in un intorno di 0 poiché funzione integrale di una funzione continua. Inoltre $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$, poiché $lim_{x\to 0}(x+\sin x) = lim_{x\to 0}(x-\sin x) = 0$ e la funzione F è limitata in un intorno di 0, ed inoltre anche $\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$. Nel nostro limite sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital: calcoliamo quindi le derivate del numeratore e del denominatore.

$$F'(x) = (1+\cos x)\cos(x+\sin x)\ln(1+x+\sin x) - (1-\cos x)\cos(x-\sin x)\ln(1+x-\sin x)$$

e

$$(1-\cos x)' = \sin x.$$

Ponendo $A(x) = (1+\cos x)\cos(x+\sin x)\ln(1+x+\sin x)$ e $B(x) = (1-\cos x)\cos(x-\sin x)\ln(1+x-\sin x)$, abbiamo che $F'(x) = A(x) - B(x)$ e calcoliamo i due limiti, $A(x)/\sin x$ e $B(x)/\sin x$, separatamente.

Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to 0} A(x)/\sin x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x+\sin x)}{\sin x}(1+\cos x)\cos(x+\sin x)\right) = 2\cdot 2.$$

Mentre

$$\lim_{x\to 0} B(x)/\sin x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-\cos x)}{\sin x}\ln(1+x-\sin x)\cos(x-\sin x)\right) = 0.$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{A(x)}{\sin x} - \frac{B(x)}{\sin x}\right) = 4+0 = 4.$$

In alternativa si può calcolare il limite con lo sviluppo di Taylor della funzione integranda in un intorno di 0 (che è il limite a cui tendono gli estremi dell'integrale).

$\square$

Esercizio 2. *Dire per quali valori di α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale*

$$\int_0^\infty \frac{(\sin(e^{-x}))^\alpha (\ln x)|\cos x|^\gamma}{(e^x-1)^\beta |\operatorname{arctg}(x-1)|^\gamma} dx.$$

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che i punti in cui l'integrale potrebbe non essere definito sono $x = 0$, dove $\ln x \to -\infty$ e $e^x - 1 \to 0$, $x = 1$, dove $\ln x \to 0$ e $\operatorname{arctg}(x-1) \to 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, dove $\cos x$ si annulla, ed infine per $x \to \infty$, dove $\ln x \to \infty$, $\sin(e^{-x}) \to 0$ e $e^x - 1 \to 0$. A priori bisognerebbe controllare pure dove si annulla $\sin(e^{-x})$ ma questo succede solo per valori negativi di x e quindi al di fuori dell'intervallo di integrazione.

Vicino a 0 si ha che $e^x - 1 \sim x$, $\ln x \to \infty$ mentre tutti gli altri termini tendono a delle costanti diverse da 0. Intorno a 0 la convergenza del nostro integrale risulta quindi equivalente alla convergenza di

$$\frac{\ln x}{x^\beta}$$

che converge, in un intorno di 0, se e solo se $\beta < 1$.

Vicino a 1 si ha che $\ln x \sim (x-1)$, $\operatorname{arctg}(x-1) \sim (x-1)$, mentre tutti gli altri termini tendono a delle costanti diverse da 0. Intorno a 1 la convergenza dell'integrale diventa equivalente alla convergenza di

$$\frac{x-1}{(x-1)^\gamma}$$

che converge, in un intorno di 1, se e solo se $\gamma < 2$.

Vicino a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ si ha che $\cos x \sim x - \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ mentre tutti gli altri termini tendono a delle costanti. Intorno a questi valori la funzione è integrabile se e solo se lo è

$$\left(x - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right)^\gamma$$

che lo è se e solo se $\gamma > -1$.

Vicino a ∞ bisogna fare un po' più di attenzione. Anzitutto abbiamo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin(e^{-x}))^\alpha}{(e^x-1)^\beta} \cdot e^{(\alpha+\beta)x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|\operatorname{arctg}(x-1)|^\gamma} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\gamma.$$

Esiste quindi un $\bar{x} \gg 0$ per cui per ogni $x > \bar{x}$ si ha che

$$\frac{1}{4}e^{-(\alpha+\beta)x} \leq \frac{(\sin(e^{-x})^\alpha}{(e^x-1)^\beta |\mathrm{arctg}(x-1)|^\gamma} \leq 4e^{-(\alpha+\beta)x}.$$

Sia ora $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $I_k = (x_k, x_{k+1})$ e

$$A = \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\cos x|^\gamma dx$$

(osserviamo che non dipende da k per la periodicità del coseno). Sia $\bar{k}$ per cui $x_{\bar{k}} \geq \bar{x}$ e quindi per ogni $k \geq \bar{k}$ si ha che $x_k \geq \bar{x}$. Quindi, poiché $f(x) > 0$ per ogni $x > 1$, il nostro integrale converge se e solo se il seguente integrale converge:

$$J = \int_{x_{\bar{k}}}^{\infty} f(x)dx = \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dk.$$

Supponiamo ora che $\alpha + \beta > 0$ e che $x_k \leq x \leq x_{k+1}$: allora, per le osservazioni fatte finora, vale che

$$J \leq \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 4e^{-(\alpha+\beta)x} \ln x |\cos x|^\gamma \leq \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 4e^{-(\alpha+\beta)x_k} \ln x_{k+1} |\cos x|^\gamma =$$

$$= \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} 4Ae^{-(\alpha+\beta)x_k} \ln(x_{k+1}) < +\infty$$

e quindi l'integrale converge se $\alpha + \beta > 0$.

Se, invece $\alpha + \beta \leq 0$, abbiamo che

$$J \geq \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{4}e^{-(\alpha+\beta)x} \ln x |\cos x|^\gamma \geq \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{4}e^{-(\alpha+\beta)x_k} \ln x_k |\cos x|^\gamma =$$

$$= \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \frac{1}{4}Ae^{-(\alpha+\beta)x_k} \ln(x_k)$$

e quindi l'integrale diverge se $\alpha + \beta \leq 0$.

In conclusione l'integrale converge se e solo se $-1 < \gamma < 2$ e $-\alpha < \beta < 1$. $\square$

Esercizio 3. *Posto*

$$F(x) = \int_1^{e^x} \ln(|\ln t|)dt.$$

(a) Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'integrale converge, dunque $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ben definita (si intende ovviamente $F(0) = 0$).

(b) La funzione F è di classe C^1?

(c) *Dire se la funzione F ha asintoti orizzontali per $x \to \infty$ e/o per $x \to -\infty$.*

(d) *Chiamata $E_i(x)$ una primitiva della funzione e^x/x si scriva esplicitamente (utilizzando la funzione E_i) una primitiva della funzione $f(x) = \ln(|\ln x|)$.*

Dimostrazione. (a) Per prima cosa notiamo che $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione integranda è sempre definita tranne quando $t = 1$ in quanto $\ln 1 = 0$ e $\ln 0$ non è definito. Ma in un intorno di 1 abbiamo che, applicando de l'Hôpital,

$$\lim_{t \to 1} \frac{\ln(|\ln t|)}{|\ln(t-1)|} = \lim_{t \to 1} \frac{1}{|\ln t|} \frac{1}{t} |t-1| = 1$$

ossia $\ln(|\ln t|) \sim |\ln(t-1)|$ che è integrabile in un intorno di 1 e quindi F è ben definita ovunque.

(b) La funzione F è ovviamente continua per costruzione. La derivata al di fuori dello 0 è data da

$$F'(x) = e^x \ln(|\ln e^x|) = e^x \ln|x|.$$

Calcolando il limite della derivata per x che tende a zero otteniamo

$$\lim_{x \to 0} F'(x) = -\infty,$$

e quindi la funzione F non è di classe C^1 in $\mathbb{R}$ ma lo è solamente in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(c) Per prima cosa osserviamo che $\lim_{x \to \infty} F(x) = +\infty$ in quanto $\ln(|\ln t|)$ tende ad infinito per t che tende ad infinito, implicando che F non possa avere asintoti orizzontali per x che tende a $+\infty$. Notiamo inoltre che anche $\lim_{x \to \infty} F'(x) = +\infty$ in quanto sia e^x che $\ln(|x|)$ tendono ad infinito per x che tende ad infinito, implicando che F non possa avere neanche asintoti obliqui.

Abbiamo già notato come la funzione integranda sia integrabile in un intorno di $t = 1$: mostriamo ora che è anche integrabile in un intorno destro di 0. Poiché per ogni x positivo si ha che $\ln x \le x$, abbiamo che $\ln|\ln t| \le |\ln t|$ che sappiamo essere integrabile in un intorno destro di 0 e quindi anche $\ln|\ln t|$ lo è. Quindi, poiché $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ è l'integrale di una funzione integrabile in un intervallo limitato, tale limite esiste ed è finito, implicando che F abbia un asintoto orizzontale per x che tende a $-\infty$.

(d) Notiamo che la funzione $f(x)$ è definita in $(0,1)\cup(1,\infty) = I_1 \cup I_2$, calcoliamo quindi l'integrale della funzione distintamente nei due intervalli I_1 e I_2.

Iniziamo prima da I_2: in questo intervallo $\ln x$ assume sempre valori maggiori di 0 e quindi si può togliere il valore assoluto. Attuando la sostituzione $y = \ln x$ (e quindi $x = e^y$ e $dx = e^y dy$) e integrando per parti, otteniamo

$$\int \ln \ln x dx = \int \ln y e^y dy = \ln y e^y - \int \frac{1}{y} e^y dy =$$
$$= \ln y e^y - E_i(y) = x \ln \ln x - E_i(\ln x).$$

Passiamo ora a I_1, in questo caso $\ln x$ assume sempre valori negativi e quindi $\ln|\ln x| = \ln \ln \frac{1}{x}$ Attuando la sostituzione $y = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$ (e quindi $x = e^{-y}$ e $dx = -e^{-y} dy$) e integrando per parti, otteniamo

$$\int \ln \ln \frac{1}{x} dx = -\int \ln y e^{-y} dy =$$
$$-\left(-\ln y e^{-y} + \int \frac{1}{y} e^{-y} \right) = \ln y e^{-y} - E_i(-y) = x \ln \ln \frac{1}{x} - E_i(\ln x).$$

Osserviamo che abbiamo calcolato $\int \frac{1}{y} e^{-y}$ tramite la sostituzione $z = -y$ ottenendo $-\int \frac{1}{-z} e^z dz = E_i(z) = E_i(-y)$. Mettendo insieme i due intervalli abbiamo che la primitiva di $f(x)$ è $x \ln|\ln x| - E_i(\ln x)$.

$\square$