Soluzioni primo compitino analisi matematica

13 dicembre 2017

Esercizio 1. *Studiare la successione definita per ricorrenza da*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n}, \quad n \geq 1.$$

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che, per induzione, $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$. Per ipotesi $a_1 = 1$ mentre se $a_n > 0$ si ha che $a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{2a_n} > 0$ poiché sia numeratore che denominatore sono positivi. Quindi d'ora in poi useremo $a_n > 0$.

Mostriamo ora che $a_n > 2$ per ogni $n \geq 2$. Per prima cosa notiamo che $a_2 = \frac{a_1+4}{2a_1} = \frac{5}{2}$. Si ha che

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n} > 2$$

se e solo se (poiché a_n è positivo)

$$a_n^2 - 4a_n + 4 = (a_n - 2)^2 > 0$$

che è sempre vero qualunque sia il valore si a_n e quindi a_n è maggiore di 2 per ogni $n \geq 2$.

Mostriamo ora che se $a_n > 2$ allora $a_{n+1} < a_n$. Infatti si ha che

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n} < a_n$$

se e solo se

$$a_n^2 + 4 < 2a_n^2$$

che è equivalente a

$$a_n^2 > 4.$$

In particolare abbiamo ottenuto che $a_{n+1} < a_n$ quando $a_n > 2$ e, viceversa, $a_{n+1} > a_n$ se $0 < a_n < 2$. Questo ci assicura in particolare che la successione non possa divergere.

Infine il limite L, se esiste, deve soddisfare

$$\frac{L^2 + 4}{2L} = L.$$

Risolvendo l'equazione si ottiene

$$2L^2 = L^2 + 4$$

ossia $L = \pm 2$. Ma il termine -2 è escluso come limite dal fatto che la successione è a termini positivi.

Ricapitolando, la successione converge definitivamente dall'alto verso 2. $\square$

Esercizio 2. *Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{N}$, se esiste, il seguente limite:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^k - 1}{n^k}\right)^{(n^2)}.$$

Dimostrazione. Per prima cosa riscriviamo il termine generale della successione come

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^{(n^2)}.$$

Distinguiamo ora tre casi.

$k = 2$ Nel caso $k = 2$ la successione converge all'inverso del numero di Nepero $1/e$. Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-n^2}\right)^{-(n^2)}\right)^{-1} = \frac{1}{e}$$

per definizione.

$k < 2$ In questo caso si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^{(n^2)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^{(n^k)}\right)^{(n^{2-k})} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\infty} = 0,$$

ove la penultima uguaglianza vale poiché $k < 2$

$k > 2$ In questo caso si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^{(n^2)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^{(n^k)}\right)^{(n^{2-k})} = \left(\frac{1}{e}\right)^{0} = 1,$$

ove la penultima uguaglianza vale poiché $k > 2$. $\square$

Esercizio 3. *Sia a_n la successione definita per ricorrenza sa*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}, \quad n \geq 1.$$

Si studi, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dimostrazione. Anzitutto studiamo il limite della successione. Per induzione mostro che la successione è a termini positivi. Per ipotesi $a_1 = 1 > 0$, inoltre se $a_n > 0$ anche a_{n+1} lo sarà in quanto rapporto di numeri positivi. La successione è inoltre decrescente infatti

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n} < a_n$$

se e solo se

$$3a_n + a_n^2 > a_n.$$

Dall'ultima equazione si ricava

$$a_n(a_n + 2) > 0$$

che è sempre rispettata poiché la successione è a termini positivi. Applicando il teorema di esistenza del limite ottengo che i valori che il limite della successione può assumere devono soddisfare $L = \frac{L}{3+L}$ ossia $L = 0$ o $L = -2$. Poiché la successione è a termini positivi posso escludere $L = -2$ e poiché la successione è positiva e decrescente posso escludere che la successione diverga. In particolare ottengo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Per studiare il comportamento della serie si applica il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{x}{3 + a_n}$$

che, per quanto visto prima, tende a $x/3$.

Possiamo quindi immediatamente concludere che la serie diverge per $x > 3$ e converge per $x < 3$. Manca da studiare il caso $x = 3$. Dobbiamo quindi studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^n.$$

Dimostriamo per induzione che $a_n 3^n \geq \frac{1}{n}$ (il che, in particolare, ci mostra che la serie diverge) ossia $na_n 3^n \geq 1$. Per ipotesi abbiamo che $1 \cdot a_1 \cdot 3 = 3 > 1$ e quindi il passo base è dimostrato. Ora si ha che

$$(n + 1)a_{n+1}3^{n+1} \geq na_n 3^n$$

se e solo se

$$3\frac{n+1}{n}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

che è equivalente a

$$3\frac{n+1}{n}\frac{1}{3 + a_n} \geq 1.$$

Esplicitando si ottiene

$$1+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{a_n}{3}$$

che è equivalente a

$$a_n\leq\frac{3}{n}.$$

Per mostrare la divergenza della serie è quindi sufficiente far vedere che $a_n \leq \frac{3}{n}$ e anche questo si fa per induzione. Infatti $a_1 = 1 \leq 3$ per ipotesi. inoltre

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3+a_n}\leq\frac{a_n}{3}\leq\frac{1}{n}\leq\frac{3}{n+1}$$

e il risultato è dimostrato.

Un metodo alternativo per dimostrare la divergenza della serie nel caso $x = 3$ è un'applicazione del criterio di Raabe. Si consideri il limite

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n 3^n}{a_{n+1}3^{n+1}}-1\Big)=\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n(3+a_n)}{a_n 3}-1\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{na_n}{3}\Big),$$

il criterio di Raabe ci assicura che se tale limite è minore di 1 allora la serie diverge. Poiché $b_n = \frac{na_n}{3}$ è una successione a termini positivi, possiamo sfruttare il criterio del rapporto per calcolare il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{3}\frac{3}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{n(3+a_n)a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(3+a_n)}=\frac{1}{3}.$$

Poiché il limite del rapporto $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tende a $\frac{1}{3} < 1$ la succesione dei b_n converge a 0 e quindi, per il criterio di Raabe, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ diverge. □

Dimostrazione alternativa. Mostriamo che il termine generale della successione a_n si scrive come $\frac{2}{3^n-1}$. Lo dimostriamo per induzione: per $n = 1$ l'uguaglianza è banalmente vera. Mostriamo che se l'uguaglianza vale per n allora vale anche per $n + 1$:

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3+a_n}=\frac{\frac{2}{3^n-1}}{3+\frac{2}{3^n-1}}=\frac{\frac{2}{3^n-1}}{\frac{3^{n+1}-3+2}{3^n-1}}=\frac{2}{3^{n+1}-1}.$$

La serie diventa quindi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^n}{3^n-1}$. Si nota facilmente che se $x \geq 3$ il termine generale della successione non è un infinitesimo e quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$. Infatti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x^n}{3^n-1}=\begin{cases}2 & \text{se } x=3,\\ +\infty & \text{se } x>3.\end{cases}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene che, per $x < 3$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2x^{n+1}}{3^{n+1}-1}}{\frac{2x^n}{3^n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x(3^n-1)}{3^{n+1}-1}=\frac{x}{3}$$

e quindi la serie converge per $x < 3$.

$\square$

Esercizio 4. *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(Kn)!} x^n,$$

al variare di $K \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Dire per quali valori di K, α, x, la serie risulta convergente, o divergente, o indeterminata.

Dimostrazione. Anzitutto notiamo che se $x = 0$ la serie converge a 0 per qualunque α e K. Sia quindi d'ora in poi $x \neq 0$. Applico il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti ed ottengo, posto $a_n = \frac{(n!)^\alpha}{(Kn)!}|x^n|$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{(Kn+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(Kn+K)}|x| =$$
$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\left(1+\frac{1}{Kn}\right)\left(1+\frac{2}{Kn}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1+\frac{K}{Kn}\right)} \frac{n^\alpha}{K^K n^K}|x|$$

Possiamo quindi dire che:

- se $\alpha < K$ la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende a zero e quindi la serie converge assolutamente ed in particolare la serie originale converge;
- se $\alpha > K$ la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverge a $+\infty$. In particolare questo implica che se $x > 0$ la serie diverge a $+\infty$ mentre per $x < 0$ la serie è indeterminata in quanto a segni alterni ed il termine generale diverge, crescendo, a $+\infty$. Il termine generale è crescente perché $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$;
- se $\alpha = K$ la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a $\frac{|x|}{K^K}$. Dobbiamo quindi distinguere altri quattro casi:
  - se $|x| < K^K$ allora la serie converge assolutamente e quindi converge;
  - se $x > K^K$ allora il termine generale della serie diverge a $+\infty$ e quindi la serie diverge a $+\infty$;
  - se $x < -K^K$ la serie è a segni alterni col termine generale che, a meno del segno, diverge crescendo a $+\infty$ e quindi la serie è indeterminata;
  - se $|x| = K^K$ allora la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a 1 e quindi il criterio del rapporto sembra non dirci niente. In realtà si osserva immediatamente che la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a 1 dall'alto, in particolare $a_{n+1} > a_n$. Questo ci permette si concludere che nel

caso in cui $x = K^K$ la serie ha tutti i termini positivi e diverge, mentre nel caso $x = -K^K$ la serie è a segni alterni ed il termine generale diverge crescendo a $+\infty$ ed è quindi indeterminata. $\square$