

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

3 settembre 2018

1. Scrivere le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - 2u' + u = e^x \left( \sin x + \frac{1}{1+x^2} \right).$$

*Soluzione.* Si tratta di una equazione lineare non omogenea di ordine 2 a coefficienti costanti. Il polinomio associato è  $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$  che ha  $\lambda = 1$  come radice di molteplicità 2. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata si scrivono nella forma

$$u_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

al variare di  $c_1$  e  $c_2$  in  $\mathbb{R}$  (se siamo interessati alle soluzioni reali).

Per risolvere l'equazione non omogenea è ora sufficiente trovarne una soluzione particolare. Grazie alla linearità possiamo spezzare il termine noto in due addendi e studiare separatamente le due equazioni risultanti.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$u'' - 2u' + u = e^x \sin x \tag{1}$$

possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Visto che  $1 \pm i$  non è radice del polinomio associato sappiamo esistere una soluzione del tipo:

$$u(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

per una scelta opportuna delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1 e^x \sin x + c_1 x e^x \cos x + c_2 e^x \cos x - c_2 e^x \sin x \\ &= (c_1 - c_2) e^x \sin x + (c_1 + c_2) e^x \cos x. \end{aligned}$$

Similmente (mettendo  $c_1 - c_2$  al posto di  $c_1$  e  $c_1 + c_2$  al posto di  $c_2$ ) si trova

$$u''(x) = -2c_2 e^x \sin x + 2c_1 e^x \cos x.$$

Dunque

$$\begin{aligned}u'' - 2u' + u &= [-2c_2 - 2(c_1 - c_2) + c_1]e^x \sin x \\ &\quad + [2c_1 - 2(c_1 + c_2) + c_2]e^x \cos x \\ &= -c_1 e^x \sin x - c_2 e^x \cos x.\end{aligned}$$

Dunque una soluzione  $u_1$  di (1) si ottiene con  $c_1 = -1$  e  $c_2 = 0$ :

$$u_1(x) = -e^x \sin x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$u'' - 2u' + u = \frac{e^x}{1+x^2} \quad (2)$$

utilizziamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Posto

$$u(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$$

imponiamo innanzitutto

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$

cosicché si ha

$$\begin{aligned}u' &= c_1 e^x + c_2(x+1)e^x \\ u'' &= c_1 e^x + c_2(x+2)e^x + c_1' e^x + c_2'(x+1)e^x.\end{aligned}$$

Visto che  $e^x$  e  $xe^x$  sono soluzioni dell'omogenea, si avrà

$$u'' - 2u' + u = c_1' e^x + c_2'(x+1)e^x.$$

Dunque per avere una soluzione dell'equazione (2) basterà risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0, \\ c_1' e^x + c_2'(x+1)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}. \end{cases}$$

Dividendo per  $e^x$  e sostituendo la seconda equazione con la differenza delle due equazioni si ottiene

$$\begin{cases} c_2' = \frac{1}{1+x^2} \\ c_1' = -x c_2' = -\frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

per cui una soluzione si ottiene scegliendo  $c_2 = \arctg x$  e  $c_1 = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ .  
Dunque una soluzione  $u_2$  della equazione (2) è data da

$$u_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2)e^x + x \arctg x e^x.$$

Per concludere, tutte le soluzioni dell'equazione data si scrivono nella forma

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) = \left[ c_1 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right] e^x + (c_2 + \operatorname{arctg} x) x e^x$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . □

2. Sia dato l'integrale

$$\int_0^{+\infty} |\ln x|^\beta (\operatorname{arctg} x)^\gamma x^\alpha e^{-x} dx.$$

- (a) Dire per quali valori di  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  in  $\mathbb{R}$  l'integrale è finito.  
 (b) Calcolare esplicitamente l'integrale per  $\beta = \gamma = 0$  e  $\alpha$  intero positivo.

*Soluzione.* La funzione integranda

$$f(x) = |\ln x|^\alpha (\operatorname{arctg} x)^\gamma x^\alpha e^{-x}$$

è definita e continua su  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ . L'integrale va dunque inteso in senso improprio per  $x \rightarrow 0^+$ , per  $x \rightarrow 1^\pm$  e per  $x \rightarrow +\infty$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$  osserviamo che  $\ln x \ll e^{\frac{x}{2}}$ ,  $\operatorname{arctg} x \sim \pi/2$  e quindi

$$0 \leq f(x) \ll \frac{\pi}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

ed essendo  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx < +\infty$  la funzione è sommabile in un intorno di  $+\infty$  senza alcuna condizione sui parametri  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ .

Per  $x \rightarrow 1^\pm$  si ha  $\ln x \sim x - 1$ ,  $\operatorname{arctg} x \sim \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x \sim 1$ ,  $e^{-x} \sim \frac{1}{e}$  da cui

$$f(x) \sim \frac{\pi^\gamma}{4^\gamma \cdot e} |x - 1|^\beta \quad \text{per } x \rightarrow 1^\pm.$$

Dunque l'integrale in un intorno (destra o sinistra) di  $x = 1$  ha lo stesso carattere dell'integrale di  $|x - 1|^\beta$ . Notoriamente tale integrale è finito se e solo se  $\beta > -1$ .

Per  $x \rightarrow 0^+$  osserviamo che  $\operatorname{arctg} x \sim x$ ,  $e^{-x} \sim 1$  dunque

$$f(x) \sim |\ln x|^\beta x^{\alpha+\gamma} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Se  $\alpha + \gamma > -1 + \varepsilon$  per qualche  $\varepsilon > 0$ , sapendo che  $|\ln x|^\beta \ll x^{-\varepsilon}$  otteniamo che

$$f(x) \ll x^{\alpha+\gamma-\varepsilon} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

e quindi l'integrale in un intorno destro di 0 è finito essendo  $\alpha + \gamma - \varepsilon > -1$ . Dunque se  $\alpha + \gamma > -1$  e  $\beta > -1$  l'integrale dato dall'esercizio è finito.

Se  $\beta \leq -1$  sappiamo già che l'integrale non può essere finito (non lo è in un intorno di  $x = 1$ )

Rimane il caso  $\alpha + \gamma \leq -1$  e  $\beta > -1$ . In tal caso  $|\ln x|^\beta \gg \frac{1}{|\ln x|}$  per  $x \rightarrow 0^+$  dunque

$$f(x) \sim |\ln x|^\beta x^{\alpha+\gamma} \gg \frac{1}{x|\ln x|} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

Sappiamo però che se  $b < 1$  si ha

$$\int_0^b \frac{1}{x|\ln x|} dx = - \int_0^b \frac{1}{x \ln x} dx = -[\ln |\ln x|]_0^b = +\infty$$

e quindi l'integrale dato non può essere finito.

Abbiamo quindi mostrato che l'integrale è finito se e solo se  $\alpha + \gamma > -1$  e  $\beta > -1$ .

Nel caso  $\beta = \gamma = 0$  e  $\alpha > 0$  si può applicare l'integrazione per parti per ottenere:

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = [-x^\alpha e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx = 0 + \alpha \cdot I_{\alpha-1}.$$

Si osserva banalmente che

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

e dunque per  $\alpha \in \mathbb{N}$  abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_{\alpha+1} = (\alpha + 1) \cdot I_\alpha. \end{cases}$$

Questa non è altro che la definizione di  $\alpha!$  dunque  $I_\alpha = \alpha!$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}$ . □

3. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_n^{2n} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$$

studiarne, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , convergenza assoluta e convergenza semplice.

*Soluzione.* Posto

$$a_n = \int_n^{2n} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$$

si osserva che per ogni  $n \geq 1$  risulta  $a_n > 0$  in quanto la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo  $(n, 2n]$ . Dunque siamo di fronte ad una serie a segni alterni.

Per quanto riguarda la convergenza assoluta dobbiamo considerare la serie  $\sum a_n$ . Osserviamo che da un lato si ha

$$a_n \leq \int_n^{2n} \max_{x \in [n, 2n]} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} = \frac{n \ln(2n)}{(1+4n^2)^\alpha} \leq \frac{\ln(2n)}{4^\alpha n^{2\alpha-1}} \ll \frac{1}{n^{2\alpha-1-\varepsilon}}$$

per ogni  $\varepsilon > 0$  e dall'altro

$$a_n \geq \int_n^{2n} \min_{x \in [n, 2n]} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} = \frac{n \ln n}{(1+n^2)^\alpha} \geq \frac{n \ln n}{(2n^2)^\alpha} = \frac{\ln n}{2^\alpha n^{2\alpha-1}} \gg \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

Dunque, per confronto, se  $2\alpha - 1 > 1$  la serie  $\sum a_n$  converge, se invece  $2\alpha - 1 \leq 1$  la serie  $\sum a_n$  diverge. Significa che  $\alpha > 1$  è condizione necessaria e sufficiente affinché la serie data converga assolutamente.

Inoltre sempre dalle stime precedenti si osserva che se  $2\alpha - 1 \leq 0$  cioè se  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  la successione  $a_n$  non è infinitesima e quindi la serie data non può convergere (né assolutamente né semplicemente).

Viceversa se  $\alpha > \frac{1}{2}$  la successione  $a_n$  è infinitesima. Per poter applicare il teorema di Leibniz e concludere quindi che la serie a segni alterni è convergente, basta dimostrare che la successione  $a_n$  è decrescente, almeno per  $n$  abbastanza grande.

Per fare ciò osserviamo che  $a_n = f(n)$  se poniamo

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt.$$

Per dimostrare che  $a_n$  è decrescente per  $n$  grande, è sufficiente quindi mostrare che  $f'(x) < 0$  per  $x$  grande. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$f'(x) = 2 \frac{\ln(2x)}{(1+(2x)^2)^\alpha} - \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} = \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} \left[ \frac{2 \ln(2x)}{\ln x} \frac{(1+x^2)^\alpha}{(1+(2x)^2)^\alpha} - 1 \right] \quad (3)$$

ma essendo

$$\frac{2 \ln(2x)}{\ln x} = \frac{2 \ln 2 + 2 \ln x}{\ln x} \rightarrow 2 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

e

$$\frac{(1+x^2)^\alpha}{(1+(2x)^2)^\alpha} = \left( \frac{1+x^2}{1+4x^2} \right)^\alpha \rightarrow \frac{1}{4^\alpha}$$

si ottiene che la parentesi quadra in (3) tende a  $\frac{2}{4^\alpha} - 1$  che è negativo essendo  $4^\alpha > 2$  per  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Dunque dalla (3) si ottiene

$$\frac{(1+x^2)^\alpha}{\ln x} \cdot f'(x) \rightarrow \frac{2}{4^\alpha} - 1 < 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

da cui necessariamente  $f'(x) < 0$  per  $x$  abbastanza grande. □