Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 05/07/2017

Stra Federico*

11 luglio 2017

Esercizio 1

Testo

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 2$ e $\alpha = 1$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big(\sin(1/\sqrt{n}) + (-1)^n \tan(1/n)\big)^{\alpha}.$$

Soluzione

Cominciamo dalla convergenza assoluta. Usando gli sviluppi di Taylor di sin e tan centrati in 0, per $n \to \infty$ si ha

$$\sin(1/\sqrt{n}) + (-1)^n \tan(1/n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Questo ci dice che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^n \big(\sin(1/\sqrt{n}) + (-1)^n \tan(1/n)\big)^{\alpha}\right|}{n^{-\alpha/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\alpha}}{n^{-\alpha/2}} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

per cui, per il teorema del confronto asintotico, la serie assegnata converge assolutamente se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/2},$$

la quale come è noto converge se e solo se $\alpha > 2$.

Passiamo ora alla convergenza semplice. Possiamo già dire che la serie assegnata converge semplicemente per $\alpha > 2$ perché converge assolutamente, quindi restano da studiare separatamente i casi $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Per $\alpha = 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big(\sin(1/\sqrt{n}) + (-1)^n \tan(1/n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big((-1)^n \sin(1/\sqrt{n}) + \tan(1/n)\big).$$

*stra@mail.dm.unipi.it

I termini della serie sono somma di due addendi. Abbiamo che la serie del primo addendo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(1/\sqrt{n})$$

converge semplicemente per Leibniz, infatti $\sin(1/\sqrt{n})$ è positivo, infinitesimo e decrescente;[1] mentre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n) = \infty$$

per confronto asintotico con la serie armonica. Ne segue che la serie assegnata diverge per $\alpha = 1$ perché somma di una serie convergente e di una divergente.[2]

Per $\alpha = 2$ invece

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \big(\sin(1/\sqrt{n}) + (-1)^n \tan(1/n)\big)^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\big((-1)^n \sin(1/\sqrt{n})^2 + (-1)^n \tan(1/n)^2 + 2\sin(1/\sqrt{n})\tan(1/n)\big).$$

Analizziamo le proprietà di convergenza dei singoli termini.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(1/\sqrt{n})^2 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan(1/n)^2$$

convergono entrambe per Leibniz, infatti $\sin(1/\sqrt{n})^2$ e $\tan(1/n)^2$ sono entrambi positivi, infinitesimi e decrescenti. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\sin(1/\sqrt{n})\tan(1/n)$$

converge per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2},$$

poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin(1/\sqrt{n})\tan(1/n)}{n^{-3/2}} = 2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

La serie assegnata allora converge semplicemente per $\alpha = 2$ perché somma di tre serie convergenti.

Attenzione! Moltissimi hanno usato impropriamente il teorema di Leibniz, applicandolo alla serie dello sviluppo asintotico invece che alla serie originaria. Il problema è che il teorema del confronto asintotico vale per serie positive e non per serie a segno alterno. Nello svolgimento del compito precedente (oltre che a lezione...) era stato fornito il seguente controesempio: le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

[1] Nel compito scritto è conveniente fare tutte le opportune verifiche...

[2] Non basta dire che $\sum_{n=1}^{\infty}\tan(1/n)$ diverge, senza studiare le proprietà di convergenza dell'altro pezzo. Il teorema preciso da applicare è: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge implica $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

hanno termini asintotici, ma la seconda converge (semplicemente) per Leibniz, mentre la prima no. E infatti la prima serie non soddisfa le ipotesi del teorema di Leibniz perché non è decrescente in modulo, pur essendo asintotica a una che lo è.

L'esercizio assegnato in questo compito è precisamente una **minima variante** di questo controesempio. Ripassate o studiate il criterio del confronto asintotico e il teorema di Leibniz e assicuratevi di applicarli propriamente, verificando correttamente le ipotesi necessarie.

Esercizio 2

Testo

Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, il seguente limite, se esiste:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt}{\ln\big(1+\sin(x)^2\big)^{\alpha}}.$$

Soluzione

Abbiamo i seguenti sviluppi di Taylor centrati in 0:

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)^2} &= e^{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2} = e^{x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)}\\
&= 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 + o\big((x^2)^2\big)\\
&= 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\\
&= 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4);
\end{aligned}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4);$$

$$\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt = \int_0^{x^2} (1+o(t))\, dt = \Big[t + o(t^2)\Big]_0^{x^2} = x^2 + o(x^4);$$

$$\ln\big(1+\sin(x)^2\big) = \ln(1+x^2+o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt}{\ln\big(1+\sin(x)^2\big)^{\alpha}}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\Big(1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\Big) - \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big) - \frac{3}{2}\left(x^2 + o(x^4)\right)}{\big(x^2+o(x^2)\big)^{\alpha}}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\Big)x^4 + o(x^4)}{|x|^{2\alpha} + o(|x|^{2\alpha})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{8} + o(x^4)}{|x|^{2\alpha} + o(|x|^{2\alpha})}\\
&= \frac{1}{8}\lim_{x\to 0} |x|^{4-2\alpha} = \begin{cases} 0 & 4-2\alpha > 0, \text{ ovvero } \alpha < 2\\ 1/8 & 4-2\alpha = 0, \text{ ovvero } \alpha = 2\\ \infty & 4-2\alpha < 0, \text{ ovvero } \alpha > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Attenzione! Non è vero che $(x^2)^\alpha = x^{2\alpha}$. Questa uguaglianza vale per $x \geq 0$, ma in generale è falsa per $x < 0$. L'uguaglianza corretta è $(x^2)^\alpha = |x|^{2\alpha}$. Pertanto, pure coloro che hanno sviluppato correttamente con Taylor, hanno detto erroneamente che

$$(\text{limite assegnato}) = \frac{1}{8} \lim_{x\to 0} x^{4-2\alpha} = \infty$$

se $\alpha > 2$, il che non è vero perché il suddetto limite non esiste in generale (potendo $x^{4-2\alpha}$ non essere neanche definita per $x < 0$), oppure, per esempio con $\alpha = 5/2$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{4-2\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} x^{-1} = \infty\\ \lim_{x\to 0^-} x^{4-2\alpha} &= \lim_{x\to 0^-} x^{-1} = -\infty.\end{aligned}$$

Questo errore non è stato penalizzato nella correzione.

Esercizio 3

Testo

Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = e^t\big(t + \sin(t) + 1/t\big).$$

Soluzione

È un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

ha una radice doppia $\lambda = 1$. Le soluzioni dell'omogenea associata sono pertanto

$$y_0 = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Troviamo una soluzione dell'inomogena con il metodo della variazione delle costanti: la candidata soluzione è della forma

$$y_*(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$$

e come è noto ci si riconduce a dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t = 0,\\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)(te^t + e^t) = e^t\big(t + \sin(t) + 1/t\big).\end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda e dividendo per e^t si trova

$$c_2'(t) = t + \sin(t) + 1/t,$$

da cui integrando troviamo

$$c_2(t) = \frac{t^2}{2} - \cos(t) + \ln|t|\,.$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$c_1'(t) = -tc_2'(t) = -t^2 - t\sin(t) - 1,$$

da cui integrando

$$c_1(t) = -\frac{t^3}{3} + t\cos(t) - \sin(t) - t.$$

La soluzione particolare trovata è quindi

$$\begin{aligned} y_*(t) &= \left(-\frac{t^3}{3} + t\cos(t) - \sin(t) - t\right) e^t + \left(\frac{t^2}{2} - \cos(t) + \ln|t|\right) te^t \\ &= \left(\frac{t^3}{6} - \sin(t) + t\ln|t| - t\right) e^t \end{aligned}$$

e la soluzione generale è

$$y(t) = y_0(t) + y_*(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \sin(t) + t\ln|t| - t\right) e^t + c_1 e^t + c_2 te^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nota. La soluzione generale è descritta ugualmente bene da

$$y(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \sin(t) + t\ln|t|\right) e^t + c_1 e^t + c_2 te^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

perché l'addendo $-t$ in parentesi tonda si può riassorbire nella costante arbitraria c_2.