Analisi 1 e 2 - Terzo compitino
Soluzioni proposte

28 aprile 2017

Esercizio 1. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\exp\left(\int_0^x (\cos t)^{-1}dt\right)-\log(1+x)\right)^{1/(\int_0^{x^2}\exp(-t^2)dt)}.$$

Soluzione proposta. Posto $\psi(x) = \int_0^x (\cos t)^{-1}dt$, $\phi(x) = \int_0^{x^2}\exp(-t^2)dt$, riscriviamo il limite come segue:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\psi(x)}-\log(1+x)\right)^{1/\phi(x)} = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{\log\left(e^{\psi(x)}-\log(1+x)\right)}{\phi(x)}\right).$$

Ora, derivando, otteniamo:

$$\psi'(x) = \frac{1}{\cos x},$$
$$\psi''(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

e dunque $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ e $\psi''(0) = 0$, da cui

$$\psi(x) = x + o(x^2) \text{ per } x \to 0^+.$$

Ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, ricaviamo lo sviluppo:

$$e^{\psi(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \to 0^+.$$

Useremo inoltre lo sviluppo del logaritmo:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \to 0.$$

Similmente studiamo la funzione $\phi(x)$:

$$\phi'(x) = 2xe^{-x^4},$$
$$\phi''(x) = 2e^{-x^4} - 8x^4e^{-x^4}$$

e dunque $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$, $\phi''(0) = 2$, da cui

$$\phi(x) = x^2 + o(x^2) \text{ per } x \to 0^+.$$

A questo punto abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{\log\left(e^{\psi(x)}-\log(1+x)\right)}{\phi(x)}\right) =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right) =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = e^1 = e,$$

dove nell'ultimo passaggio è stato nuovamente usato lo sviluppo del logaritmo.

Altre soluzioni possibili si ottengono applicando varie volte il Teorema di De L'Hôpital, eventualmente combinato con gli sviluppi di Taylor. Ad esempio, il limite dell'esponente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(e^{\psi(x)}-\log(1+x))}{\phi(x)}$$

si presenta nella forma intederminata $\dfrac{0}{0}$ e dunque, applicando due volte il Teorema di De L'Hôpital, troviamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x}e^{\psi(x)} - \frac{1}{1+x}}{(e^{\psi(x)}-\log(1+x))(2xe^{-x^4})} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(e^{\psi(x)}-\log(1+x))} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x}e^{\psi(x)} - \frac{1}{1+x}}{(2xe^{-x^4})} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x}e^{\psi(x)} - \frac{1}{1+x}}{(2xe^{-x^4})} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\psi(x)}\left(\frac{1}{(\cos x)^2}+\frac{\sin x}{(\cos x)^2}\right)+\frac{1}{(1+x)^2}}{2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Allora il limite cercato è $e^1 = e$.

Nota: Non era richiesto, né tanto meno necessario ai fini dello svolgimento dell'esercizio, il calcolo esplicito dell'integrale. □

Esercizio 2. *Studiare, al variare di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la convergenza del seguente integrale*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos(x^2))^\alpha |\log(x)|^\beta \tan(x)^\gamma}{|x^3-x^4|}$$

Soluzione proposta. Denotando con f la funzione integranda essa è definita negli intervalli $(0,1)$ e $(1, \frac{\pi}{2})$ dove è continua: vogliamo valutarne l'andamento asintotico intorno ai tre punti $0, 1, \frac{\pi}{2}$ per ottenere condizioni necessarie e sufficienti alla convergenza dell'integrale.

Studiamo innanzitutto l'andamento di f intorno al punto 1. Applicando la formula di Taylor per il logaritmo otteniamo

$$f(x) = C\frac{|x-1|^\beta + o(|x-1|)}{|x-1| + o(|x-1|)} \sim |x-1|^{\beta-1} \text{ per } x \longrightarrow 1$$

con $C \in \mathbb{R}^*$, integrabile se e solo se $\beta > 0$.

Nel punto $\frac{\pi}{2}$, invece, sempre con Taylor possiamo sviluppare la funzione ottenendo

$$f(x) = C\frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\gamma} + o(x - \frac{\pi}{2}^{\gamma})} \text{ per } x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

con $C \in \mathbb{R}^*$, integrabile se e solo se $\gamma < 1$.

Anche per valutare l'andamento asintotico in 0 utilizziamo la formula di Taylor, ottenendo in quest'occasione termini lievemente più complicati, in particolare

$$f(x) = C\frac{\left(x^{4\alpha}|\log(x)|^{\beta}x^{\gamma}\right)(1 + o(1))}{x^3 + o(x^3)} \sim x^{4\alpha+\gamma-3}|\log(x)|^{\beta} \text{ per } x \longrightarrow 0$$

che, poiché abbiamo già imposto la condizione $\beta > 0$ converge se e soltanto se $4\alpha + \gamma > 2$, poichè ha il medesimo comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}\log(n)^{\nu}}$$

che, se $\nu \leq 1$, converge se e soltanto se $\mu > 1$.

Ricapitolando, l'integrale proposto converge se soltanto se sono contemporaneamente verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \beta > 0 \\ \gamma < 1 \\ 4\alpha + \gamma > 2. \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 3. *Dire per quali valori si α in $\mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, risulta convergente l'integrale*

$$\int_0^{\infty} \frac{e^t\cos(e^t)}{t^{\alpha}}dt$$

Soluzione proposta. Consideriamo innanzitutto il caso $\alpha = 0$. Abbiamo

$$\int_0^{\infty} e^t\cos(e^t)dt = \lim_{b\to\infty}\left[\sin(e^t)\right]_0^b$$

e tale limite non esiste.

Sia quindi $\alpha > 0$. Scrivo $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ e studio separatamente i due integrali.

In $t = 0$ l'integrando si comporta asintoticamente come $\frac{1}{t^{\alpha}}$, quindi l'integrale $\int_0^1 \frac{e^t\cos(e^t)}{t^{\alpha}}dt$ converge se e solo se converge l'integrale $\int_0^1 t^{-\alpha}dt$, cioè quando $\alpha < 1$.

Per studiare la convergenza dell'integrale in $[1, +\infty]$, integriamo per parti.

$$\int_1^b \frac{e^t\cos(e^t)}{t^{\alpha}}dt = \left[\frac{\sin(e^t)}{t^{\alpha}}\right]_1^b + \alpha\int_1^b \frac{\sin e^t}{t^{\alpha+1}}dt$$

Passando ora al limite per $b \to +\infty$ si ha che $\frac{\sin(e^b)}{b^{\alpha}} \to 0$, mentre

$$\left|\int_1^{\infty} \frac{\sin e^t}{t^{\alpha+1}}dt\right| \leq \int_1^{\infty} \frac{|\sin e^t|}{t^{\alpha+1}}dt \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt$$

e quest'ultimo integrale converge per ogni $\alpha > 0$.

In conclusione, l'integrale dato converge per $0 < \alpha < 1$. $\square$