Analisi 1 e 2 - Secondo compitino
Soluzioni proposte

24 febbraio 2017

Esercizio 1. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 2\cos x + 1}{x^2 \ln(1 + 3x^2)}.$$

Soluzione proposta. Un modo per calcolare il limite proposto è espandere i termini in serie: da

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ \cos t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n!} \\ \ln(1+t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \text{ per } ||t|| < 1 \end{aligned}$$

si ricava immediatamente che, per $x \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ 2\cos x &= 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \\ x^2 \ln(1+3x^2) &= 3x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

in cui per determinare l'ultimo o piccolo si espande il logaritmo al primo ordine ottenendo un resto $o(x^2)$ e poi si utilizza il fatto che $O(x^2) \cdot o(x^2) = o(x^4)$ (con l'ovvio abuso di notazione). A questo punto si possono sostituire le espansioni nel limite, riducendosi a calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - 2 + x^2 - \frac{x^4}{12} + 1 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{12}x^4}{3x^4} = \frac{5}{36}.$$

Una seconda strada per calcolare il limite proposto senza utilizzare gli sviluppi in serie sfrutta il teorema di de l'Hopital. Innanzitutto con un semplice manipolazione algebrica e sfruttando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{ln(1+t)}{t} = 1$$

si può manipolare il limite ottenendo la seguente forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 2\cos x + 1}{x^2 \ln(1+3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 2\cos x + 1}{3x^4} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\ln(1+3x^2)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 2\cos x + 1}{3x^4}.$$

Possiamo ora applicare tre volte la regola di de l'Hopital, le cui ipotesi sono banalmente verificate ad ogni iterazione, assieme al limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

per ottenere il risultato: nello specifico

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 2\cos x + 1}{3x^4} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-x\,\mathrm{e}^{-x^2} + \sin x}{6x^3} \overset{H}{=}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{e}^{-x^2} + 2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + \cos x}{18x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + 4x\,\mathrm{e}^{-x^2} - 4x^3\,\mathrm{e}^{-x^2} - \sin x}{36x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\mathrm{e}^{-x^2}(6-4x^2)}{36} - \frac{\sin x}{36x} \right] \overset{LN}{=} \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

Il conto si poteva fare alternativamente applicando de l'Hopital due volte ed altri limiti notevoli oppure utilizzando pedissequamente il teorema quattro volte. □

Esercizio 2. *Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) n^{\alpha}.$$

Soluzione proposta. Sia $a_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) n^{\alpha}$. Sviluppando con Taylor si ha

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) n^{\alpha} = \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) n^{\alpha}$$

Quindi $a_n \sim n^{\alpha-2}$. Per il criterio del confronto asintotico abbiamo:

- per $\alpha < 1$, la serie converge assolutamente.
- per $\alpha \geq 1$, la serie non converge assolutamente.
- per $\alpha \geq 2$ la serie non converge.

Mostriamo che la serie converge per $1 \leq \alpha < 2$. Sappiamo che $a_n \to 0$, quindi per applicare il criterio di Leibniz occorre che a_n sia definitivamente decrescente. Ci basta mostrare che la funzione

$$\phi(x) = (\sin(x) - \ln(1+x))x^{-\alpha}$$

è crescente in un intorno destro di 0. Si ha

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= x^{-\alpha}\left[\cos(x) - \frac{1}{1+x} - \alpha\frac{\sin(x)-\ln(1+x)}{x}\right] \\
&= x^{-\alpha}\left[1 - 1 + x + o(x) - \alpha\frac{x - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}\right] \\
&= x^{-\alpha}\left[x - \alpha\frac{x}{2} + o(x)\right] \\
&= x^{-\alpha}\left[x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + o(x)\right]
\end{aligned}$$

Quindi, se $\alpha < 2$, si ha $\phi'(x) > 0$ per x sufficientemente piccolo, cioè ϕ è crescente in quell'intervallo, che è quanto volevamo dimostrare. □

Esercizio 3. *Si consideri per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ la funzione $f_{\alpha,\beta}$ definita da*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = e^{\sin 2x} + \cos x + \alpha \sin x - \beta x^2.$$

- *Dire per quali valori di α e β la funzione $f_{\alpha,\beta}$ risulta invertibile in un intorno di $x = 0$.*
- *Sia, per tali α e β, $\phi_{\alpha,\beta}$ la funzione inversa di $f_{\alpha,\beta}$. Calcolare, se esiste,*

$$\phi'_{\alpha,\beta}(2).$$

Soluzione proposta. La funzione $f_{\alpha,\beta}$ è continua, quindi è invertibile in un intorno di $x = 0$ se e solo se, in tale intorno, essa è strettamente monotona. Poiché è di classe C^∞, sicuramente se $f'_{\alpha,\beta}(0) \neq 0$, allora esiste un intorno di $x = 0$ in cui la derivata prima non si annulla, pertanto non cambia segno, quindi la funzione $f_{\alpha,\beta}$ è strettamente monotona in tale intervallo.

Calcoliamo dunque tale derivata:

$$f'_{\alpha,\beta}(x) = 2e^{\sin 2x}\cos 2x - \sin x + \alpha\cos x - 2\beta x.$$

Per $x = 0$ si ottiene $f'_{\alpha,\beta}(0) = 2+\alpha$, che è diverso da 0 se e solo se $\alpha \neq -2$. Ne deduciamo che la funzione è invertibile in un intorno di $x = 0$ quando $\alpha \neq -2$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Nel caso in cui $\alpha = -2$, la derivata in $x = 0$ della funzione $f_{\alpha,\beta}$ è nulla, quindi per studiare il comportamento della funzione intorno a 0 bisogna calcolare le derivate successive:

$$\begin{aligned}
&f''_{\alpha,\beta}(x) = -4e^{\sin 2x}\sin 2x + 4e^{\sin 2x}\cos^2 2x - \cos x + 2\sin x - 2\beta, \\
&f'''_{\alpha,\beta}(x) = 8e^{\sin 2x}\cos^3 2x - 8e^{\sin 2x}\cos 2x - 24e^{\sin 2x}\sin 2x\cos 2x + 2\cos x + \sin x.
\end{aligned}$$

Ora, $f''_{-2,\beta}(0) = 3 - 2\beta$, quindi è diversa da 0 se e solo se $\beta \neq \dfrac{3}{2}$. In tal caso, il punto $x = 0$ è di massimo o minimo e dunque la funzione non è invertibile in alcun intorno di 0. Se invece $\beta = \dfrac{3}{2}$, poiché $f'''_{-2,3/2}(0) = 8 - 8 + 2 = 2$, il punto $x = 0$ è di flesso e la funzione $f_{-2,3/2}$ è invertibile in un suo intorno.

In conclusione, la funzione $f_{\alpha,\beta}$ è invertibile in un intorno di $x = 0$ se $\alpha \neq -2$ oppure se $(\alpha,\beta) = \left(-2, \dfrac{3}{2}\right)$.

La funzione inversa $\phi_{\alpha,\beta}$ è tale che $\phi_{\alpha,\beta}(2) = 0$, essendo $f_{\alpha,\beta}(0) = 2$. Essa é derivabile in 2 se e solo se $f'_{\alpha,\beta}(0) \neq 0$, cioè se e solo se $\alpha \neq -2$. In tal caso:

$$\phi'_{\alpha,\beta}(2) = \frac{1}{f'_{\alpha,\beta}(0)} = \frac{1}{2+\alpha}.$$

Una seconda soluzione per il primo punto si ottiene utilizzando lo sviluppo di Taylor di $f_{\alpha,\beta}(x)$ fino al terzo ordine, cioè:

$$\begin{aligned}
&f_{\alpha,\beta}(x) = e^{\sin 2x} + \cos x + \alpha \sin x - \beta x^2 = \\
&= 1 + \sin 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{6}\sin^3 2x + \cos x + \alpha \sin x - \beta x^2 + o(x^3) = \\
&= 1 + 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \alpha x - \frac{\alpha}{6}x^3 - \beta x^2 + o(x^3) = \\
&= 2 + (2+\alpha)x + \left(\frac{3}{2} - \beta\right)x^2 - \frac{\alpha}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Da tale sviluppo deduciamo che:

$$\begin{aligned}
f'_{\alpha,\beta}(0) &= 2 + \alpha, \\
f''_{\alpha,\beta}(0) &= 3 - 2\beta, \\
f'''_{\alpha,\beta}(0) &= -\alpha
\end{aligned}$$

e concludiamo come prima. $\square$