Analisi 1 e 2 - Primo compitino
Soluzioni proposte

1 dicembre 2016

Esercizio 1. *Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la successione definita da*

$$x_1 = \frac{1}{2} \ , \quad x_{n+1} = \frac{x_n - x_n^2}{n^\alpha + x_n^2} \, , \quad n \geq 1 \ .$$

1. *Dire se la successione ammette limite e, eventualmente, calcolarlo.*

2. *Studiare, al variare di $K \in \mathbb{N}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{K^n} x_n \ .$$

Soluzione proposta. Per mostrare la convergenza della successione data utilizziamo un argomento di monotonia e limitatezza. Proviamo inizialmente che se vale $0 < x_n < 1$ allora vale anche $0 < x_{n+1} < 1$: infatti vale

$$x_{n+1} = \frac{x_n - {x_n}^2}{n^\alpha + x_n^2} > 0$$

poiché $x_n - x_n^2 > 0$ dal momento che $x_n < 1$, mentre il denominatore è banalmente positivo. Similmente vale

$$x_{n+1} < 1 \iff x_n < 2x_n^2 + n^\alpha$$

che è verificata poiché x_n^2 è positivo e $n^\alpha \geq 1$ per $n \in \mathbb{N}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ mentre $x_n < 1$ per ipotesi induttiva. Poiché $x_1 = \frac{1}{2}$ (questo è il nostro passo base) ne segue per induzione che $0 < x_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Provata la limitatezza della successione, passiamo a mostrarne la monotonia: in particolare, vista la positività dei termini, vale

$$x_{n+1} = \frac{x_n - {x_n}^2}{n^\alpha + x_n^2} < x_n \Longleftrightarrow 1 - x_n < n^\alpha + x_n^2 \Longleftrightarrow n^\alpha + x_n + x_n^2 > 1$$

e l'ultima disuguaglianza è sempre verificata poiché $x_n > 0$ e $n^\alpha \geq 1$ per $n \geq 1$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ è dunque limitata e monotona e dunque convergente: poniamo $L \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} x_n$. Passando al limite per $n \to +\infty$ vale $x_n - x_n^2 < 1$

mentre per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n^\alpha + x_n^2 > N$ per ogni $n \geq \bar{n}$, dal momento che la successione n^α diverge al tendere all'infinito di n con $\alpha > 0$: ne segue che per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \geq \bar{n}$ vale

$$x_{n+1} = \frac{x_n - {x_n}^2}{n^\alpha + x_n^2} < \frac{1}{N}$$

da cui, per definizione di limite, deve valere anche $L < \frac{1}{N}$ e dunque $L = 0$. La stragrande maggioranza degli studenti ha qui cercato di ricavare il limite della successione sostituendolo all'interno della relazione ricorsiva e risolvendo l'equazione ottenuta: si tratta di un errore macroscopico. Il principale motivo per cui questo ragionamento è fallace è che il limite deve soddisfare la relazione ricorsiva nel caso in cui questa sia funzione continua solamente del termine precedente, mediante un procedimento di passaggio al limite (si confronti l'esercizio 3), mentre nel nostro caso la ricorsione dipende drammaticamente dall'indice n e quindi non si può concludere che il limite deve verificare una data equazione algebrica (che certamente non potrebbe comunque dipendere dall'indice) passando al limite con un ragionamento simile alle successioni ricorsive a coefficienti costanti. Un altro errore nel ricavare il limite, presente in molti compiti, consiste nell'affermare che una successione positiva decrescente è infinitesima: questo è palesemente falso (come dimostra, ad esempio, $x_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$).

Per studiare il comportamento della serie assegnata, fissati i parametri α, K poniamo $a_n \overset{def}{=} \frac{n^n x_n}{K^n}$ e applichiamo il criterio del rapporto sostituendo la relazione ricorsiva per x_{n+1}, ottenendo

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{1}{K} \frac{1 - x_n}{n^\alpha + x_n^2} = \frac{1}{K} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n^\alpha} \frac{1 - x_n}{1 + \frac{x_n^2}{n^\alpha}}.$$

Dobbiamo ora studiare il comportamento della successione $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ quando $n \to +\infty$: ricordando che $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, che $2 < e < 3$, e osservando che poiché $x_n \to 0$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x_n}{1 + \frac{x_n^2}{n^\alpha}} = 1$$

possiamo distinguere i seguenti casi, al variare di α e K

$0 < \alpha < 1$. In questo caso $\frac{n+1}{n^\alpha} \to_{+\infty} +\infty$ e dunque $r_n \to +\infty$ e la serie è divergente per ogni K.

$\alpha > 1$. In questo caso $\frac{n+1}{n^\alpha} \to_{+\infty} 0$ e dunque $r_n \to 0$ e la serie è convergente indipendentemente da K.

$\alpha = 1, K \leq 2$. In questo caso si vede che $r_n \to_{+\infty} \frac{e}{K} > 1$ e dunque la serie diverge.

$\alpha = 1, K \geq 3$. In questo caso si vede che $r_n \to_{+\infty} \frac{e}{K} < 1$ e dunque la serie risulta convergente.

In questo esercizio molti studenti hanno provato ad utilizzare il criterio della radice, traendone le più disparate ed immotivate conclusioni: il criterio della radice non ci fornisce informazioni perché non sappiamo calcolare agevolmente $lim_{n\to+\infty} n\sqrt[n]{x_n}$, e soprattutto non possiamo concludere che $\sqrt[n]{x_n}$ tenda a 0 a 1 solamente perché $x_n \to 0$ (gli esempi archetipici in tal senso sono $\frac{1}{n^n}$ e $\frac{1}{n}$). Inoltre da molti è stata erroneamente studiata la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{K^n} \frac{x_n - x_n^2}{n^\alpha + x_n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{K^n} x_{n+1}$$

che è una serie assolutamente diversa da quella proposta e dal comportamento potenzialmente diverso. Infine molti hanno consistentemente spezzato i limiti di prodotti coi prodotti dei limiti, anche quando alcuni pezzi erano divergenti; molti altri invece hanno scritto cose quali $lim_{n\to+\infty} n+1 = lim_{n\to+\infty} n$: questo è certamente vero, ma nella fattispecie quello che interessava era un'equivalenza asintotica, che richiederebbe qualche cautela formale in più. $\square$

Esercizio 2. *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{2^{n^\alpha}}$$

(1) *Studiarne la convergenza, al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.*

(2) *Si studi il caso di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$.*

Soluzione proposta. (1) Per $\alpha = 0$, otteniamo la serie $\sum_n \frac{1}{2}$, che chiaramente diverge. Per $\alpha = 1$, osserviamo che, poichè $n! > 2^n$ per $n \geq 4$, il termine n-esimo della serie non è infinitesimo, pertanto la serie diverge. Sia ora $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2$. In questo caso vale la disuguaglianza

$$\frac{(n!)^\alpha}{2^{n^\alpha}} \leq \frac{(n!)^\alpha}{2^{n^2}} = b_n$$

Applicando il criterio del rapporto alla successione b_n otteniamo

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{((n+1)!)^\alpha}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha}{2^{2n+1}} \longrightarrow 0 \qquad \forall\alpha$$

Da questo si deduce che la serie $\sum b_n$ converge, quindi per confronto converge anche la serie $\sum \frac{(n!)^\alpha}{2^{n^\alpha}}$ per ogni $\alpha \geq 2$.

(2) Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$. Osserviamo che

$$\frac{(n!)^\alpha}{2^{n^\alpha}} \leq \frac{n^{n\alpha}}{2^{n^\alpha}} =: b_n$$

Applico il criterio della radice alla successione b_n:

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{n^\alpha}{2^{n^{\alpha-1}}} = \left(\frac{n^{\alpha-1}}{(2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}})^{n^{\alpha-1}}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \longrightarrow 0.$$

Infatti se a_n è una successione che tende a infinito e $A > 1$, sappiamo che $\frac{a_n}{A^{a_n}} \longrightarrow 0$. (Nel nostro caso $a_n = n^{\alpha-1}$ e $A = 2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$). Da ciò si deduce che la serie $\sum b_n$ è convergente, ma allora per confronto lo è anche la serie $\sum \frac{(n!)^\alpha}{2^{n^\alpha}}$ per tutti gli $\alpha > 1$.

Molti hanno provato a determinare la convergenza della serie per tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$; faccio osservare che ciò non era richiesto. Inoltre ho osservato numerosi errori riguardanti le proprietà delle potenze; ricordo che NON è vero che $2^{xy} = 2^x 2^y$, così come NON è vero che $2^{\alpha^n} = (2^\alpha)^n$. □

Esercizio 3. *Studiare la successione definita per ricorrenza da*

$$a_0 = \frac{1}{10}, \; a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}, \; n \geq 0.$$

Soluzione proposta. Se la successione $(a_n)_n$ ammette limite L, questo soddisfa la relazione

$$L = \frac{1}{2+L}$$

da cui $L^2 + 2L - 1 = 0$ e dunque $L = -1 \pm \sqrt{2}$.

Ora, $a_0 = \dfrac{1}{10} > 0$ e se $a_n > 0$ allora anche $a_{n+1} = \dfrac{1}{2+a_n} > 0$; quindi il limite, se esiste, sarà non negativo. Escludiamo dunque che sia $L = -1 - \sqrt{2}$ e mostriamo che $(a_n)_n$ converge a $\sqrt{2} - 1$.

Osserviamo che $a_n < \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow a_{n+1} > \sqrt{2} - 1$. Infatti vale la seguente catena di coimplicazioni:

$$a_{n+1} > \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2+a_n} > \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow a_n < \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - 1.$$

Ne deduciamo che, essendo $a_0 = \dfrac{1}{10} < \sqrt{2} - 1$, la sottosuccessione $(a_{2k})_k$ è formata da elementi compresi tra 0 e $\sqrt{2} - 1$, mentre $(a_{2k+1})_k$ da elementi maggiori di $\sqrt{2} - 1$.

Ora mostriamo che $(a_{2k})_k$ è crescente:

$$a_{2k} < a_{2k+2} \Leftrightarrow a_{2k} < \frac{1}{2 + \frac{1}{2+a_{2k}}} \Leftrightarrow a_{2k} < \frac{2 + a_{2k}}{5 + 2a_{2k}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{2k}^2 + 2a_{2k} - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < a_{2k} < \sqrt{2} - 1,$$

cosa vera per ogni k per quanto già osservato. Analogamente, $(a_{2k+1})_k$ è decrescente, essendo

$$a_{2k-1} > a_{2k+1} \Leftrightarrow a_{2k-1} > \frac{1}{2 + \frac{1}{2+a_{2k-1}}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{2k-1} < -1 - \sqrt{2} \text{ o } a_{2k+1} > \sqrt{2} - 1,$$

vero per ogni $k > 0$.

Dunque le due sottosuccessioni sono monotone; inoltre sono limitate:

$$a_0 \leq a_{2k} < \sqrt{2} - 1 < a_{2h+1} \leq a_1$$

per ogni $k, h \geq 0$; pertanto ammettono limite, possibilmente diverso. Osserviamo però che, essendo $a_{n+2} = \dfrac{2 + a_n}{5 + 2a_n}$ per ogni n, il limite di entrambe le sottosuccessioni deve soddisfare l'equazione:

$$x = \frac{2 + x}{5 + 2x},$$

che ha per soluzioni $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Poiché le due sottosuccessioni sono a termini positivi, l'unico possibile limite (per entrambe) è $\sqrt{2} - 1$, che dunque è anche il limite di (a_n).

Molti hanno scritto: *Se* $0 < a_n < \sqrt{2} - 1$ *allora la successione è crescente.* Questa frase non è corretta: ciò che è vero è che $a_n < a_{n+1}$ per gli n che rispettano tale disuguaglianza (nel caso dell'esercizio, per gli n pari). Inoltre, dopo aver dimostrato che $0 < a_n < \sqrt{2} - 1$ implica $a_n < a_{n+1}$, per verificare che tutta la successione sia crescente, bisognerebbe provare che per ogni a_n vale $0 < a_n < \sqrt{2} - 1$ (cosa, comunque, non vera): non basta osservarlo solo per $n = 0$! $\square$