Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 13/01/2017

Stra Federico*

18 gennaio 2017

Esercizio 1

Testo

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n!)^\alpha}{n^n}.$$

Soluzione

Osserviamo che con $x = 0$ la serie converge assolutamente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia allora $x \neq 0$ nel seguito. Poniamo $a_n = \frac{x^n (n!)^\alpha}{n^n}$ e, con l'intento di applicare il criterio del rapporto, studiamo il limite di

$$\gamma_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \, \frac{(n+1)^\alpha n^n}{(n+1)^{n+1}} = |x| \, \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Ricordando che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1, \\ \infty & \text{se } \alpha > 1, \\ \frac{|x|}{e} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Ne concludiamo che:

- se $\alpha < 1$ la serie converge assolutamente per ogni x;
- se $\alpha > 1$ la serie non converge (tranne per $x = 0$);
- se $\alpha = 1$ la serie converge assolutamente per $|x| < e$, non converge per $|x| > e$ e non converge neanche per $x = \pm e$ perché non è infinitesima, essendo $\gamma_n > 1$.[1]

*stra@mail.dm.unipi.it

[1] Poiché $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$.

Esercizio 2

Testo

Studiare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_a^\infty x^{-\gamma}(e^{2/x} - e^{1/x})\,|\log x|^\beta\;dx$$

quando $a = 0$, oppure $a = 1$, oppure $a = 2$.

Soluzione

Sia $f(x) = x^{-\gamma}(e^{2/x} - e^{1/x})\,|\log x|^\beta$. Osserviamo che $f(x) > 0$ su $(0, \infty)$ per ogni β e γ. Studiamo il comportamento della funzione integranda vicino a 0. Si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x^{1-\gamma}(e^{1/x} - 1)\,|\log x|^\beta = \infty$$

per ogni β e γ. Siccome la funzione $1/x$ non è integrabile vicino a 0, anche l'integrale di $f(x)$ vicino a 0 diverge, per ogni valore di β e γ.

Studiamo ora l'integrale $\int_2^\infty f(x)\,dx$. La funzione integranda non ha singolarità in corrispondenza di $x = 2$. Per $x \to \infty$ si ha lo sviluppo

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{|\log x|^\beta}{x^\gamma} = \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{|\log x|^\beta}{x^\gamma} = \frac{|\log x|^\beta}{x^{\gamma+1}}[1 + o(1)].$$

Ne segue che l'integrale $\int_2^\infty f(x)\,dx$ è finito se e solo se $\gamma > 0$ oppure $\gamma = 0$ e $\beta < -1$.

Studiamo infine $\int_1^\infty f(x)\,dx$. Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{(x-1)^\beta} = e^2 - e,$$

quindi la funzione $f(x)$ è integrabile vicino a 1 se e solo se $\beta > -1$. Pertanto $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$ se e solo se $\beta > -1$ e $\gamma > 0$.

Esercizio 3

Testo

Scrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y'' + y' = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

Soluzione

L'equazione in questione è del secondo ordine, lineare non omogenea e a coefficienti costanti. Si può pertanto risolvere con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Cominciamo a trovare le soluzioni dell'equazione omogenea associata. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$ e ha come radici 0 e 1. Le funzioni $\{1, e^{-x}\}$ formano quindi una base delle soluzioni. Troviamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea cercandola della forma $c_1(x) + c_2(x)e^{-x}$. Con passaggi noti ci si riconduce a dover risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)e^{-x} = 0, \\ -c_2'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}}. \end{cases}$$

Si deduce subito $c_2'(x) = -\frac{e^x}{1+e^{2x}}$, da cui si trova $c_2(x) = -\arctan(e^x)$ integrando per sostituzione. Dalla prima equazione troviamo $c_1'(x) = -c_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^{2x}}$. Integrando si ottiene

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^x + e^{-x}} = && (y = e^{-x},\ dy = -e^{-x}\,dx) \\ &= -\int \frac{dy}{y+y^{-1}} = -\int \frac{y\,dy}{1+y^2} = && (z = y^2,\ dz = 2y\,dy) \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z} = -\frac{1}{2}\log(1+z) \\ &= -\frac{1}{2}\log(1+y^2) = -\frac{1}{2}\log(1+e^{-2x}). \end{aligned}$$

In conclusione, le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$y(x) = -\frac{1}{2}\log(1+e^{-2x}) - \arctan(e^x)e^{-x} + C_1 + C_2 e^{-x}$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.