Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 05/07/2016

Stra Federico*

10 luglio 2016

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sqrt{n}}^{n^2} \left(1 - \cos(1/x)\right)^{\alpha} dx.$$

Soluzione

Osserviamo che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos(1/x)}{1/x^2} = \frac{1}{2},$$

quindi esiste $\bar{x} > 0$ tale che per ogni $x \geq \bar{x}$ vale

$$\frac{1}{4^{\alpha}} \frac{1}{x^{2\alpha}} \leq \left(1 - \cos(1/x)\right)^{\alpha} \leq \frac{3^{\alpha}}{4^{\alpha}} \frac{1}{x^{2\alpha}}.$$

Pertanto la serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sqrt{n}}^{n^2} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx.$$

Consideriamo dapprima il caso $2\alpha > 1$. Si ha che

$$\int_{\sqrt{n}}^{n^2} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx = \left[\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right]_{\sqrt{n}}^{n^2} = \frac{1}{2\alpha - 1} \left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/2}} - \frac{1}{n^{4\alpha - 2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha - 1/2}} \left(1 - \frac{1}{n^{3(\alpha - 1/2)}}\right).$$

Dal momento che la parentesi tonda tende a 1 per $n \to \infty$, i termini della serie sono asintotici a $1/n^{\alpha - 1/2}$. Da ciò segue che la serie converge per $\alpha > 3/2$ e diverge per $1/2 < \alpha \leq 3/2$.

Osserviamo infine che i termini della serie crescono al descrescere di α, quindi, poiché la serie diverge per $\alpha = 3/2$, diverge anche per $0 < \alpha \leq 3/2$.

*stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 2

Testo

Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - e^{-\frac{x^2}{6}}}{2\cos(\sin x) - \frac{2+x^2}{1+x^2}}.$$

Soluzione

Sviluppiamo in serie di Taylor centrata in 0 varie sottoespressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5), \\ e^{-\frac{x^2}{6}} &= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + o(x^5), \\ 2\cos(\sin x) &= 2 - x^2 - \frac{5x^4}{12} + o(x^5), \\ \frac{2+x^2}{1+x^2} &= 2 - x^2 + x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$

Combinando i pezzi si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - e^{-\frac{x^2}{6}}}{2\cos(\sin x) - \frac{2+x^2}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{180} + o(x^5)}{-\frac{7x^4}{12} + o(x^5)} = \frac{1}{105}.$$

Esercizio 3

Testo

Scrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u' + 4u = e^{-2x} \log x + \sin x.$$

Soluzione

Sia $L = D_x^2 + 4D_x + 4$ l'operatore lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Risolviamo innanzitutto l'omogenea associata $Lu = 0$. Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2,$$

quindi le soluzioni dell'omogenea sono della forma

$$u_0(x) = \alpha e^{-2x} + \beta x e^{-2x}.$$

Troviamo ora una soluzione di $Lu = e^{-2x} \log x$ adoperando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Cercando una soluzione della forma $u(x) = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)xe^{-2x}$ andiamo a creare il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)xe^{-2x} = 0, \\ -2c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)(1-2x)e^{-2x} = e^{-2x} \log x. \end{cases}$$

Si trova rapidamente che $c_2'(x) = \log x$, da cui possiamo prendere $c_2(x) = x \log x - x$. In seguito, $c_1'(x) = -x c_2'(x) = -x \log x$, da cui $c_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \log x$. Una soluzione particolare è dunque

$$u_1(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \log x \right) e^{-2x} + (x \log x - x) x e^{-2x} = \frac{x^2}{4} (2 \log x - 3) e^{-2x}.$$

Cerchiamo ora una soluzione di $Lu = \sin x$ della forma $u_2(x) = a \sin x + b \cos x$. Si trova

$$Lu_2(x) = (3a - 4b) \sin x + (4a + 3b) \cos x = \sin x,$$

da cui $a = 3/25$ e $b = -4/25$, ovvero

$$u_2(x) = \frac{3}{25} \sin x - \frac{4}{25} \cos x.$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale originaria data dall'esercizio sono quindi

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) = \\ &= \alpha e^{-2x} + \beta x e^{-2x} + \frac{x^2}{4} (2 \log x - 3) e^{-2x} + \frac{3}{25} \sin x - \frac{4}{25} \cos x, \end{aligned}$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.