# Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 02/02/2017

Stra Federico*

5 febbraio 2017

## Esercizio 1

### Testo

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n^2}{n^\alpha + 1}.$$

### Soluzione

Poniamo $a_n = \frac{x^n n^2}{n^\alpha+1}$. Notiamo che per $x = 0$ la serie converge assolutamente (e dunque semplicemente) e vale 0 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ora
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n^\alpha + 1}{(n+1)^\alpha + 1} = |x|\,.$$

Per il criterio del rapporto la serie converge assolutamente (e dunque semplicemente) se $|x| < 1$, indipendentemente da $\alpha$. Inoltre, se $|x| > 1$ e $\alpha$ qualunque, si ha che $|a_n|$ non è infinitesimo, quindi la serie non converge né assolutamente, né semplicemente. Ci resta da studiare cosa succede se $|x| = 1$.

Supponiamo che $x = 1$. La serie è a termini positivi, quindi convergenza assoluta e semplice si equivalgono. Se $\alpha \geq 0$, allora $a_n \sim n^{2-\alpha}$, quindi la serie converge per $\alpha > 3$ e diverge per $0 < \alpha \leq 3$. Se $\alpha < 0$, allora $a_n \sim n^2$ e la serie diverge.

Studiamo infine il caso $x = -1$. Come nel caso precedente la convergenza assoluta di ha soltanto per $\alpha > 3$. Se $\alpha \leq 2$ il termine $a_n$ non è infinitesimo, quindi la serie non può convergere semplicemente. Se $2 < \alpha \leq 3$ possiamo provare ad applicare il criterio di Leibniz:

- $a_n \sim n^{2-\alpha} \to 0$;
- $|a_n|$ è definitivamente decrescente: infatti, detta $f(y) = \frac{y^2}{y^\alpha+1}$, si ha
$$f'(y) = \frac{2y(y^\alpha + 1) - \alpha y^2 y^{\alpha-1}}{(y^\alpha + 1)^2} = \frac{y}{(y^\alpha + 1)^2}[y^\alpha(2 - \alpha) + 2],$$
  che diventa negativa definitivamente in $y$ se $\alpha > 2$;

ne concludiamo che in tal caso la serie converge semplicemente (ma non assolutamente).

*stra@mail.dm.unipi.it

## Esercizio 2

### Testo

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \log(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}.$$

### Soluzione

Sviluppiamo sia il numeratore sia il denominatore in serie di Taylor del terzo ordine centrata in 0.

$$\begin{aligned}
e^x \arctan x - \frac{\sin x \log(1+x)}{x} &+ 3(\cos x - 1) + \tan(x^3) = \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\
&\quad -\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\
&\quad -\frac{3}{2}x^2 + o(x^3) + x^3 + o(x^3) \\
&= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{3}{2}x^2 + x^3 + o(x^3) \\
&= x + o(x^3),
\end{aligned}$$

$$\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = 1 - \frac{x^3}{2} - 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = -x^3 + o(x^3).$$

Allora il limite assegnato è uguale a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = -1.$$

## Esercizio 3

### Testo

Data l'equazione differenziale

$$yy' = x(4 - y^2),$$

si considerino i tre problemi di Cauchy con dato iniziale $y(0) = \sqrt{3}$, o $y(0) = 2$, o $y(0) = \sqrt{5}$.

Dire per ognuno di questi tre problemi se esiste la soluzione e, in caso affermativo, scriverla esplicitamente, indicando l'intervallo massimale di esistenza.

### Soluzione

La funzione

$$f(x, y) = \frac{x(4 - y^2)}{y}$$

è localmente Lipschitziana in $y$ uniformemente in $x$ nel dominio $\Omega = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, dunque in questa regione vale il teorema di esistenza e unicità locale per l'ODE $y' = f(x, y)$. Notiamo prima di tutto che le due funzioni costanti $y(x) = 2$ e $y(x) = -2$ sono soluzioni; in particolare la prima è una delle tre richieste dall'esercizio. Siccome le altre soluzioni dell'ODE non possono assumere i valori $\pm 2$ (per l'unicità locale), siamo legittimati a dividere per $4 - y^2$. Separando le variabili e integrando

$$\int \frac{y\,dy}{4 - y^2} = \int x\,dx$$

si ottiene

$$-\frac{1}{2} \log \left|4 - y^2\right| = \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Imponendo il dato iniziale $y(0) = \sqrt{3}$ si trova $C = -\frac{1}{2} \log(1) = 0$, da cui $\log(4 - y^2) = -x^2$, e infine $y(x) = \sqrt{4 - e^{-x^2}}$, che è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Imponendo $y(0) = \sqrt{5}$ invece si trova $C = -\frac{1}{2} \log(1) = 0$, da cui $\log(y^2 - 4) = -x^2$, e infine $y(x) = \sqrt{4 + e^{-x^2}}$, che è definita su tutto $\mathbb{R}$.