Esercizio 1. Se $y(x) = 0$ per qualche x, allora $y \equiv 0$ risolve il problema ovunque, ma non soddisfa $y(\sqrt{2}) = 2$. Quindi possiamo assumere $y \neq 0$. Dividendo per y^3 entrambi i membri e integrando si ottiene

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{x^2-1} + c$$

$$y^2 = \frac{1}{c - 2\sqrt{x^2-1}}.$$

Il valore di c si trova imponendo la condizione iniziale:

$$4 = y(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{c - 2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{c-2}$$

da cui $c = 9/4$. La soluzione è quindi

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{9/4 - 2\sqrt{x^2-1}}}$$

(occorre scegliere $y(x) > 0$ dato che $y(\sqrt{2}) > 0$ e $y(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Per determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione, si osservi che $\sqrt{x^2-1}$ è definita per $x \geq 1$ e $x \leq -1$; poiché la condizione iniziale è data nel punto $x_0 = \sqrt{2} > 1$, selezioniamo $x \geq 1$. Occorre inoltre imporre

$$\frac{9}{4} - 2\sqrt{x^2-1} > 0$$

da cui

$$x^2 < 1 + \frac{81}{64} = \frac{145}{64}.$$

Quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $\left(1, \frac{\sqrt{145}}{8}\right)$. In $x = 1$ la funzione è definita e vale $2/3$, ma non è derivabile; tale punto non è dunque da comprendere nell'intervallo di esistenza per la soluzione al problema di Cauchy.

Esercizio 2. Sia L l'operatore differenziale associato all'equazione: $L[u] = u'' - 4u' + 4u$. Risolviamo inizialmente l'equazione omogenea associata: il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Dunque

$$\{u \colon L[u] = 0\} = \left\{u(x) = \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} \colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ora si cerchi una soluzione a $L[u_1] = \sin(2x)$. Ponendo $u_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ si ha

$$u_1'(x) = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$$
$$u_1''(x) = -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x)$$

Ora imponendo

$$L[u_1] = -8a\cos(2x) + 8b\sin(2x) = \sin(2x)$$

si ottiene $a = 0$, $b = 1/8$.

Si cerchi ora una soluzione a $L[u_2] = \frac{e^{2x}}{x+2}$ con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Ponendo $u_2(x) = c_1(x)e^{2x} + xc_2(x)e^{2x}$ si ottiene

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{2x} + xc_2'(x)e^{2x} = 0 \\ 2c_1'(x)e^{2x} + (1+2x)c_2'(x)e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{x+2} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c_1'(x) + xc_2'(x) = 0 \\ 2c_1'(x) + (1+2x)c_2'(x) = \dfrac{1}{x+2} \end{cases}$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{x+2} \qquad c_1'(x) = \frac{2}{x+2} - 1$$

$$c_1(x) = 2\log|x+2| - x \qquad c_2(x) = \log|x+2|$$

L'insieme delle soluzioni all'equazione differenziale $L[u] = \frac{e^{2x}}{x+2} + \sin(2x)$ risulta infine

$$u(x) = \alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} + \frac{1}{8}\cos(2x) + (2\log|x+2| - x)e^{2x} + (\log|x+2|)xe^{2x}$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.

(1) Per $x = 0$ si ha $f_{\alpha,n}(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} xn^\alpha e^{-n^2x^2} = x \lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(e^{x^2}\right)^{-n^2} = 0$$

qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) Si osservi che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_{\alpha,n}(x) = 0,$$

e si cerchi il massimo valore di $|f_{\alpha,n}(x)|$:

$$f_{\alpha,n}'(x) = n^\alpha e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2).$$

I punti di massimo sono $\pm\frac{1}{n\sqrt{2}}$, e quindi

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_{\alpha,n}(x)| = \left| f_{\alpha,n}\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} n^{\alpha-1}$$

Se $\alpha < 1$, $f_{\alpha,n}$ converge a zero uniformemente su $\mathbb{R}$.

Se $\alpha \geq 1$, dato $a > 0$ si ha

$$0 \leq f_{\alpha,n}(x) \leq n^\alpha a e^{-n^2a^2}$$

sull'intervallo $[a, +\infty]$ non appena $n \geq \bar{n}$ con $\frac{1}{\bar{n}\sqrt{2}} < a$. Quindi $f_{\alpha,n} \to 0$ uniformemente su $[a, +\infty]$. Dato che $f_{\alpha,n}$ è dispari, lo stesso vale sugli intervalli del tipo $[-\infty, -a]$ con $a > 0$.

Invece, dato $b > 0$, sia $\bar{n}$ tale che $\frac{1}{\bar{n}\sqrt{2}} < b$. Per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\max_{x\in[0,b]} f_{\alpha,n}(x) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} n^{\alpha-1}$$

che non tende a zero. Dunque non si ha convergenza uniforme su $[0, b]$ per $\alpha \geq 1$.

(3)

$$f'_{\alpha,n}(x) = n^\alpha e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2),$$
$$f''_{\alpha,n}(x) = -n^\alpha e^{-n^2x^2} 2n^2 x(3 - 2n^2x^2).$$

Quindi

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left|f'_{\alpha,n}(x)\right| = \max\left\{ \left|f'_{\alpha,n}(0)\right|, \left|f'_{\alpha,n}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2n^2}}\right)\right| \right\} = n^\alpha \max\left\{1, \tfrac{2}{e^{3/2}}\right\}$$
$$= n^\alpha.$$

Dato che $\alpha < 0$, $f'_{\alpha,n} \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$.

(4) Per $\alpha = 0$ si ha $f'_{0,n}(x) = e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$; se $x = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f'_{0,n}(0) = 1,$$

mentre per $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} f'_{0,n}(x) = 0.$$

Poiché la funzione limite è discontinua, $f'_{0,n}$ non converge uniformemente a zero su $\mathbb{R}$. Infatti $f'_{\alpha,n}$ sono funzioni continue, e limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua.