# Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 02/02/2016

Stra Federico*

04 febbraio 2016

## Esercizio 1

### Testo

Dire per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{3\sin x}\sin(2x)\,|\ln x|^\gamma}{(1-\cos x)^\beta(\pi/2-x)^\alpha}\,dx$$

e calcolarlo per $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

### Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ può presentare, a seconda dei valori di $\alpha, \beta, \gamma$, delle discontinuità per $x = 0, 1, \pi/2$. Spezziamo dunque l'integrale in

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

Nella parte interna di ciascuno di questi due intervalli la funzione integranda è continua. Per stabilire la convergenza ci basta studiare il comportamento agli estremi e fare uso del teorema del confronto asintotico. Si hanno i seguenti sviluppi asintotici:

$$f(x) \sim \frac{2x\,|\ln x|^\gamma}{(x^2/2)^\beta(\pi/2)^\alpha} = 2^{1+\alpha+\beta}\pi^{-\alpha}x^{1-2\beta}\,|\ln x|^\gamma \qquad \text{per } x \to 0^+,$$

che è integrabile se e solo se $[\beta < 1] \vee [(\beta = 1) \wedge (\gamma < -1)]$;

$$f(x) \sim \frac{e^{3\sin 1}\sin 2}{(1-\cos 1)^\beta(\pi/2-1)^\alpha}\,|x-1|^\gamma \qquad \text{per } x \to 1,$$

che è integrabile se e solo se $\gamma > -1$;

$$f(x) \sim 2\ln(\pi/2)^\gamma(\pi/2-x)^{1-\alpha} \qquad \text{per } x \to \pi/2,$$

che è integrabile se e solo se $\alpha < 2$. In conclusione, l'integrale è convergente se e solo se $(\alpha < 2) \wedge (\beta < 1) \wedge (\gamma > -1)$.

*stra@mail.dm.unipi.it

Per $\alpha = \beta = \gamma = 0$ l'integrale si calcola integrando per parti dopo aver effettuato la sostituzione $t = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{3\sin x}\sin(2x)\,dx &= 2\int_0^{\pi/2} e^{3\sin x}\sin x\cos x\,dx \\
&= 2\int_0^1 e^{3t}t\,dt \\
&= 2\left[\frac{1}{3}e^{3t}t\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{3}e^{3t}\,dt \\
&= \frac{2}{3}e^3 - 2\left[\frac{1}{9}e^{3t}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{9} \\
&= \frac{4}{9}e^3 + \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

# Esercizio 2

## Testo

Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{1/n^2} - \cos(1/n)\right)\frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta},$$

dire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta convergente.

## Soluzione

Si ha che

$$\left(e^{1/n^2} - \cos(1/n)\right)\frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta} \sim \frac{3}{2}\frac{n^{\alpha-2}}{(\ln n)^\beta} \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Pertanto la serie converge se e solo se $(\alpha < 1) \vee [(\alpha = 1) \wedge (\beta > 1)]$.

# Esercizio 3

## Testo

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) = 1 + y(x)^2, \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

## Soluzione

Separando le variabili si trova

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = \frac{1}{x}$$

da cui $\arctan\big(y(x)\big) = \log(-x) + C$, in un intorno di $x = -1$. La costante $C$ si determina imponendo la condizione iniziale: $C = \arctan(1) - \log(1) = \pi/4$. La soluzione è quindi $y(x) = \tan\big(\log(-x) + \pi/4\big)$, definita per $x \in \left(-e^{\frac{\pi}{4}}, -e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)$.