Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 13/01/2016

Stra Federico*

15 gennaio 2016

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^2 \frac{|\sin(\pi x)|}{x^\alpha |\ln x|^\beta (4-x^2)^\gamma} dx.$$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ può presentare, a seconda dei valori di α, β, γ, delle discontinuità per $x = 0, 1, 2$. Spezziamo dunque l'integrale in

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx.$$

Nella parte interna di ciascuno di questi due intervalli la funzione integranda è continua. Per stabilire la convergenza ci basta studiare il comportamento agli estremi e fare uso del teorema del confronto asintotico. Si hanno i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha} |\ln x|^{-\beta}} = \pi 4^{-\gamma},$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{|x-1|^{1-\beta}} = \pi 3^{-\gamma},$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{|x-2|^{1-\gamma}} = \pi 2^{-\alpha} (\ln 2)^{-\beta} 4^{-\gamma}.$$

Ne segue che la convergenza si ha se e solo se valgono le seguenti tre condizioni:

$$\alpha < 2 \lor (\alpha = 2 \land \beta > 1),$$
$$\beta < 2,$$
$$\gamma < 2.$$

In forma concisa, $[\alpha < 2 \lor (\alpha = 2 \land \beta > 1)] \land \beta < 2 \land \gamma < 2$.

* stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Calcolare l'integrale

$$\int_1^8 \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}dx.$$

Soluzione

Effettuiamo la sostituzione $y = x^{1/3}$.

$$\int_1^8 \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}dx = \int_1^2 \frac{3y^2}{y+y^2}dy = 3\int_1^2 \frac{y}{1+y}dy = 3\left[y - \ln(1+y)\right]_1^2 = 3(1+\ln 2 - \ln 3).$$

Esercizio 2

Testo

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \arctan(n) \arctan(1/n).$$

Soluzione

Poniamo $a_n = x^n \arctan(n) \arctan(1/n)$. Si ha che[1]

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{\arctan(n+1)}{\arctan(n)} \frac{\arctan\big(1/(n+1)\big)}{\arctan(1/n)} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\big(1/(n+1)\big)}{\arctan(1/n)} = |x|.$$

Pertanto per $|x| > 1$ la serie diverge, mentre per $|x| < 1$ converge assolutamente.

Consideriamo ora $x = 1$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)\arctan(1/n)}{1/n} = \frac{\pi}{2},$$

quindi la serie diverge, per confronto con la serie armonica.

Per $x = -1$ invece la serie converge perché è a segni alterni decrescenti.

Esercizio 3

Testo

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3}{(x+2x^2)^2\big(\ln(1+x/2)\big)^3}.$$

[1] Sfruttando $\lim_{n\to\infty} \arctan(1/n)n = 1$.

Soluzione

Usando gli sviluppi di Taylor centrati in 0 delle funzioni note si trova

$$
\begin{aligned}
xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 &= x\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) + \frac{5}{6}x^3 = \\
&= \frac{59}{120}x^5 + o(x^5), \\
(x+2x^2)^2\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^3 &= x^2\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^5) = \frac{1}{8}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3}{(x+2x^2)^2\big(\ln(1+x/2)\big)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{59}{120}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{8}x^5 + o(x^5)} = \frac{59}{120}\Big/\frac{1}{8} = \frac{59}{15}.
$$