Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 08/09/2015

Stra Federico*

8 settembre 2015

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n - \sqrt{n+1}) \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\beta}.$$

Soluzione

Si hanno le disuguaglianze

$$\frac{n}{2} \left(1 - \cos 2\sqrt{n}\right)^{\beta} \leq (n - \sqrt{n+1}) \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\beta} \leq n \left(1 - \cos 2\sqrt{n}\right)^{\beta}.$$

Inoltre, per $n \to \infty$, vale lo sviluppo

$$\left(1 - \cos 2\sqrt{n}\right)^{\beta} = \left(\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\beta}.$$

Quindi la serie assegnata converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-1}},$$

ovvero se e solo se $\beta > 2$.

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Calcolare l'integrale

$$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx.$$

* stra@mail.dm.unipi.it

Soluzione

Effettuiamo la sostituzione $y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x} dx$:

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx = \int_1^2 \ln y\, dy = [y(\ln y - 1)]_1^2 = 2(\ln 2 - 1) - 1(0-1) = 2\ln 2 - 1 \qquad (= \ln 4 - 1).$$

Esercizio 2

Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, risulta convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-1/x) \arctan x}{x^\alpha (1 + x^\alpha)}\, dx.$$

Soluzione

Le uniche singolarità si possono sviluppare in 0 e ∞, quindi è conveniente spezzare l'integrale come

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

e analizzare separatamente la convergenza dei due pezzi.

Si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x^\beta} = 0 \qquad \forall \beta,$$

quindi in $[0, 1]$ la funzione integranda è limitata e dunque integrabile per ogni α.

Quando $x \to \infty$, la funzione integranda è asintoticamente equivalente a

$$\frac{1}{x^{2\alpha}},$$

che è integrabile su $[1, \infty]$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 3

Testo

Calcolare, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}{\ln^\gamma (1 + 2x^2)}.$$

Soluzione

Per $x \to 0$ si hanno i seguenti sviluppi di Taylor:

$$\begin{aligned}
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\sin^2 x &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\
e^{x^2} - 1 - \sin^2 x &= \frac{5}{6} x^4 + o(x^4) \\
\ln^\gamma(1 + 2x^2) &= [2x^2 + o(x^2)]^\gamma = 2^\gamma x^{2\gamma} + o(x^{2\gamma}),
\end{aligned}$$

pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}{\ln^\gamma(1 + 2x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{5}{6} x^4 + o(x^4)}{2^\gamma x^{2\gamma} + o(x^{2\gamma})} = \begin{cases} 5/24 & \gamma = 2 \\ 0 & \gamma < 2 \\ \infty & \gamma > 2 \end{cases}.$$