Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 01/07/2015

Stra Federico*

1 luglio 2015

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}.$$

Soluzione

In successione si possono calcolare i seguenti sviluppi di Taylor per $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \\
\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \\
n^2\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
\left(1 - n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha} &= \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Pertanto la serie converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, esiste finito l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^{3/\beta})}{\sin(x^{1/3}) + x^{2/3}}\, dx.$$

Soluzione

Vedi compito del 18/09/2014.

*stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 2

Testo

Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, il seguente limite, se esiste:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \log\left(\frac{x^2 \sin x}{2} + e^{x^\alpha}\right).$$

Soluzione

Il limite assegnato è uguale a

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})\right) \log\left[e^{x^\alpha}\left(1 + \frac{x^2 \sin x}{2e^{x^\alpha}}\right)\right] = \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})\right) \left[x^\alpha + \log\left(1 + \frac{x^2 \sin x}{2e^{x^\alpha}}\right)\right] = \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})\right) \left[x^\alpha + O\left(\frac{x^2 \sin x}{2e^{x^\alpha}}\right)\right] = \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})\right) [x^\alpha + o(x^\alpha)] = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} x^{\alpha-2} = \begin{cases} 0 & \alpha < 2, \\ \frac{1}{2} & \alpha = 2, \\ \infty & \alpha > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Testo

Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ si ponga

$$a_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n \, dx.$$

Dimostrare che la successione (a_n) risulta decrescente e che per ogni $n \geq 3$ si ha

$$a_n + a_{n-2} = \frac{1}{n-1}.$$

Calcolare poi, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Soluzione

Se $x \in [0, \pi/4]$, allora $0 \leq \tan x \leq 1$. Quindi $(\tan x)^{n+1} \leq (\tan x)^n$, da cui $a_{n+1} \leq a_n$. Per $n \geq 3$ possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
a_n + a_{n-2} &= \int_0^{\pi/4} (\tan x)^{n-2} [1 + (\tan x)^2] \, dx = \qquad \text{(sostituzione } t = \tan x\text{)} \\
&= \int_0^1 t^{n-2} (1 + t^2) \frac{dt}{1 + t^2} = \\
&= \int_0^1 t^{n-2} \, dt = \left.\frac{t^{n-1}}{n-1}\right|_0^1 = \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

La successione (a_n) è decrescente e positiva, quindi il limite esiste. Chiamiamolo L. Si ha che

$$2L = \lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n-2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0,$$

quindi $L = 0$.