Correzione del secondo compitino di Analisi 1 e 2 A.A. 2014/2015

Luca Ghidelli, Giovanni Paolini, Leonardo Tolomeo

1 febbraio 2016

Esercizio 1

Testo. Dire per quali valori del parametro reale α, $-\infty < \alpha \leq 3$, la funzione

$$f(x) = (1 - \cos(1/x))x^\alpha \log x$$

risulta uniformemente continua sulla semiretta $(0, +\infty)$.

Soluzione. Scriviamo il dominio $I = (0, +\infty)$ come unione dei due intervalli $I_1 = (0, a]$ e $I_2 = [a, +\infty)$, dove a è un qualsiasi punto del dominio stesso. L'uniforme continuità di f su I è equivalente all'uniforme continuità di f su I_1 e I_2, perché I_1 e I_2 sono intervalli non disgiunti. La parte restante dello svolgimento sarà suddiviso in quattro parti.

(A) Se $\alpha > 0$, f è uniformemente continua su $(0, a]$.

Dimostrazione. Facciamo vedere che f si può estendere con continuità ad una funzione $\tilde{f}$ definita sull'intervallo chiuso $[0, a]$, ponendo $\tilde{f}(0) = 0$. Per fare ciò è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Il fattore $(1 - \cos(1/x))$ è limitato, essendo sempre compreso tra 0 e 2. Inoltre, per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0.$$

Di conseguenza $f(x) \to 0$ per $x \to 0$, quindi f si estende ad $\tilde{f}$ nel modo descritto. L'estensione $\tilde{f}$ è continua ed è definita su un compatto, quindi è uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor. Pertanto anche la sua restrizione $\tilde{f}|_{(0,a]} = f|_{(0,a]}$ è uniformemente continua.

(B) Se $\alpha \leq 0$, f non è uniformemente continua su $(0, a]$.

Dimostrazione. Se per assurdo f fosse uniformemente continua su $(0, a]$, si estenderebbe a una funzione continua $\tilde{f}$ definita su $[0, a]$. Ma per $\alpha \leq 0$

f non è limitata in un intorno di zero: infatti, prendendo per esempio la successione $x_n = 1/(\pi + 2\pi n)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2\, x_n^\alpha \log x_n = \lim_{x\to 0^+} 2\, x^\alpha \log x = -\infty.$$

Quindi f non può essere estesa con continuità in 0.

(C) Se $\alpha < 3$, f è uniformemente continua su $[a, +\infty)$.

Dimostrazione. Notiamo che f è derivabile su I. Calcoliamone allora la derivata, e valutiamola con la notazione di Landau[1] per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(1/x)\, x^{\alpha-2} \log x + (1 - \cos(1/x))\; x^{\alpha-1}(1 + \alpha \log x) = \\ &= -(1/x + o(1/x))\, x^{\alpha-2} \log x + (1/2x^2 + o(1/x^2))\, x^{\alpha-1}(1 + \alpha \log x) = \\ &= -(1 + o(1))\, x^{\alpha-3} \log x + (1/2 + o(1))\, x^{\alpha-3}(1 + \alpha \log x) = \\ &= (1 + o(1))\, x^{\alpha-3}(1/2 + (\alpha/2 - 1) \log x). \end{aligned}$$

Per $\alpha < 3$ limite di $f'(x)$ per $x \to +\infty$ è uguale a 0, perché sia $x^{\alpha-3}$ che $x^{\alpha-3} \log x$ tendono a 0 (il secondo per il teorema di de l'Hôpital, applicato come nella parte (A)). Di conseguenza f' è limitata su I_2, dunque è lipschitziana. In particolare è uniformemente continua.

(D) Se $\alpha = 3$, f non è uniformemente continua su $[a, +\infty)$.

Dimostrazione. Per $\alpha = 3$ la derivata diventa

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + o(1))(1 + \log x).$$

Essa tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, quindi f non può essere uniformemente continua.

In conclusione, f è uniformemente continua se e solo se $0 < \alpha < 3$.

Errori comuni. Un primo errore molto diffuso è quello di affermare che, per $\alpha \leq 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Ciò non è corretto poiché tale limite non esiste: la successione $x_n = 1/2\pi n$ tende a zero ed è tale che $f(x_n) = 0$ per ogni n.

Altri errori frequenti sono dovuti all'utilizzo di "fatti teorici" falsi, come quelli discussi nel seguito.

[1] Si dice che una funzione $g(x)$ è "$o(h(x))$ per $x \to +\infty$" se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Questa notazione è particolarmente utile per descrivere in maniera compatta il fatto che una funzione $g(x)$ sia "piccola" rispetto a un'altra funzione $h(x)$ per x che tende a $+\infty$. Osserviamo che, in particolare, una funzione $g(x)$ è $o(1)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Ovviamente la medesima notazione si può utilizzare non solo per i limiti a $+\infty$ ma anche per i limiti a un qualsiasi numero reale, o a $-\infty$.

- Non è necessario che f' sia limitata affinché f sia uniformemente continua. Esempio: $f(x) = \sqrt{|x|}$. Questo esempio si può facilmente adattare per trovare una funzione uniformemente continua ma con
$$\limsup_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.$$
- È falso che $|f(x)| \leq mx + q$ (per qualche m, q) implichi l'uniforme continuità di f in un intorno di $+\infty$. Esempio: $f(x) = \sin(x^2)$.
- È falso anche che l'esistenza del limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$
implichi l'uniforme continuità di f in un intorno di $+\infty$ (l'esempio è lo stesso del punto precedente).

Valutazione. Le parti (A) e (B) sono state valutate complessivamente 5 punti. Il corretto svolgimento di una sola delle due parti è stato valutato 3 punti. Punteggi intermedi sono stati assegnati in modo coerente (per esempio, uno svolgimento completo della parte (B) e uno svolgimento parziale della parte (A) sono stati valutati complessivamente 4 punti).

Il medesimo criterio è stato adottato per le parti (C) e (D), anch'esse valutate complessivamente 5 punti.

Gli "svolgimenti parziali" valutati almeno 1 punto includono, per esempio:

- dimostrare la parte (B) affermando che
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$
(vedi paragrafo relativo agli errori comuni);
- dimostrare correttamente una delle parti, ma con una disuguaglianza non ottimale per α (es: parte (C) con $\alpha < 2$ invece di $\alpha < 3$).

Esercizio 2

Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan(\ln(x)) - \arctan(x)\right).$$

Prima soluzione. Riscriviamo l'argomento del limite come frazione
$$x\left(\arctan(\ln(x)) - \arctan(x)\right) = \frac{\arctan(\ln(x)) - \arctan(x)}{\frac{1}{x}}.$$
Siccome valgono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, osserviamo che entrambi il numeratore $f(x) := \arctan(\ln(x)) - \arctan(x)$ ed il denominatore $g(x) := \frac{1}{x}$ sono funzioni infinitesime all'infinito:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Inoltre sia $f(x)$ che $g(x)$ sono funzioni continue e derivabili su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$, con $g'(x)$ mai nulla, e per la precisione:

$$f'(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} - \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad g'(x) = -\frac{1}{x^2}\ .$$

Ci sono quindi tutte le premesse per poter applicare il teorema di De l'Hôpital (nella versione per $x \to +\infty$ ed in presenza di una forma indeterminata della forma $\frac{0}{0}$). Calcoliamo dunque il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{\ln^2(x)}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = -\infty + 1 = -\infty,$$

utilizzando i limiti notevoli $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Il limite cercato vale dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty.$$

Seconda soluzione. Siccome stiamo consideranto il limite per $x \to +\infty$ è lecito avvalersi della formula (valida per $x > 0$)

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

per riscrivere l'argomento del limite come segue:

$$x\left(\arctan(\ln(x)) - \arctan(x)\right) = x\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\right)\ .$$

Utilizzando lo sviluppo al primo ordine dell'arcotangente (valido per $x \to 0$)

$$\arctan(x) = x(1+o(1))$$

ed osservando che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}(1+o(1)) - \frac{1}{\ln(x)}(1+o(1))\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} 1 + o\,(1) - \frac{x}{\ln(x)}(1+o(1)) = -\infty,
\end{aligned}$$

poiché vale il limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty.$$

Errori frequenti.

- Spesso il teorema di de l'Hôpital è stato utilizzato senza neppure controllare di essere in presenza di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

- In qualche caso il teorema di de l'Hôpital è stato applicato scorrettamente (ad esempio considerando la derivata di $\frac{1}{g(x)}$ al posto di quella di $g(x)$)
- Molti studenti hanno tentato di utilizzare lo sviluppo dell'arcotangente $\arctan(x) = x(1 + o(1))$ per $x \to +\infty$ invece che per $x \to 0$. Inutile dire che tale procedimento è profondamente sbagliato, e che lo sviluppo corretto dell'arcotangente all'infinito è $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Diversi studenti hanno dato prova di non saper calcolare correttamente la derivata delle funzioni in gioco.
- In certi casi sono stati commessi errori di manipolazione algebrica più o meno importanti (segni sbagliati, esponenti dimenticati).

Valutazione. L'esercizio è stato idealmente diviso in due parti: (A) l'applicazione del teorema di de l'Hôpital per riscrivere il limite; (B) il calcolo effettivo del limite.

L'utilizzo del tutto corretto del teorema di de l'Hôpital, senza il successivo calcolo del limite è stato valutato 5 punti. L'utilizzo corretto del teorema senza la verifica delle ipotesi ha comportato la detrazione di 1 punto. Errori più o meno gravi nei calcoli sono valsi da -1 a -4 (-1 per un segno dimenticato, -4 per un calcolo scorretto della derivata di una funzione composta).

Esercizio 3

Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$e^x = 1 - x^3 + 4\lambda$$

ha una e una sola soluzione $x(\lambda)$.
Dire se la funzione $x(\lambda)$ risulta continua e derivabile per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e calcolare, se esiste, $x'(0)$.

Soluzione. L'equazione è equivalente a

$$\lambda = \frac{e^x + x^3 - 1}{4}$$

Sia

$$f(x) := \frac{e^x + x^3 - 1}{4}.$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e

$$f'(x) = \frac{e^x + 3x^2}{4} > 0,$$

per cui f è strettamente crescente (e quindi iniettiva) e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Inoltre,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

quindi per il teorema dei valori intermedi, f è suriettiva.
Dato che f è bigettiva, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\exists! x(\lambda)$ tale che $f(x(\lambda)) = \lambda$, cioè

$$e^{x(\lambda)} = 1 - x(\lambda)^3 + 4\lambda.$$

Poiché $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e bigettiva, allora la sua inversa $x(\lambda)$ è continua. Inoltre, dato che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $x(\lambda)$ è derivabile per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$x'(\lambda) = \frac{1}{f'(x(\lambda))}.$$

Per $\lambda = 0$, si verifica facilmente che $x(0) = 0$, in quanto $f(0) = 0$. Per cui,

$$x'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1/4} = 4.$$

Errori comuni e commenti.

- In molti hanno dedotto che f è iniettiva dicendo che $f' \geq 0$. Questo non è vero (la funzione costante $f \equiv 0$ ha derivata $f' \geq 0$), ma bisogna dire che $f' > 0$.
- Si poteva dedurre continuità e derivabilità di $x(\lambda)$ usando la teoria delle equazioni differenziali ordinarie (che non ci si aspettava che gli studenti conoscessero, in ogni caso). Non ci addentriamo nello svolgimento.

Valutazione. Il problema era diviso naturalmente in 3 parti:

- Dimostrare che la soluzione $x(\lambda)$ esiste ed è unica (4 punti);
- Dimostrare che $x(\lambda)$ è continua e derivabile (3 punti);
- Calcolare $x'(0)$ (3 punti).