Correzione del quinto compito
di Analisi 1 e 2

Stra Federico*

28 gennaio 2015

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^\alpha}.$$

Soluzione

Se $\alpha \leq 1$, $\frac{n^n}{(n!)^\alpha} \geq \frac{n^n}{n!} \geq 1$, quindi la serie diverge. Se $\alpha > 1$, applicando il criterio del rapporto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^\alpha} \frac{n!^\alpha}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = e \cdot 0 = 0,$$

quindi la serie converge.

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ la funzione $f(x)$, definita da

$$f(x) = e^x + \alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma \ln(x+1) + \delta \arctan x,$$

risulta infinitesima, per $x \to 0$, di ordine massimo possibile.

Soluzione

Sviluppiamo la funzione in serie di Taylor fino al terzo ordine:

$$f(x) = (1+\beta) + (1+\alpha+\gamma+\delta)x + \frac{1}{2}(1-\beta-\gamma)x^2 + \frac{1}{6}(1-\alpha+2\gamma-2\delta)x^3 + o(x^3).$$

Ponendo uguali a zero i primi quattro coefficienti si trova un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite la cui unica soluzione è

$$\alpha = -1, \qquad \beta = -1, \qquad \gamma = 2, \qquad \delta = 8.$$

Con questa scelta dei parametri la funzione risulta quindi un o-piccolo di x^3.

* stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 2

Testo

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\right)^{1/(x\tan x)}.$$

Soluzione

Calcoliamo il logaritmo del limite assegnato. Poiché $\log(\,\cdot\,)$ è una funzione continua, esso commuta con l'operazione di limite, pertanto

$$\begin{aligned}
\log\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\right)^{1/(x\tan x)}\right] &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}\log\left(\frac{1-\cos x}{x^2/2}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}\log\left(\frac{x^2/2-x^4/24+o(x^4)}{x^2/2}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}\log\left(1-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}\left(-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x\sin x}\left(-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\right)^{1/(x\tan x)} = e^{-1/12}.$$

Esercizio 3

Testo

Dire per quali valori di $\beta\in\mathbb{R}$ esiste finito l'integrale

$$\int_0^\infty x^\beta e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx.$$

Calcolare tale integrale nel caso $\beta=0$.

Soluzione

Consideriamo l'integrabilità vicino a 0. Confrontando la funzione integranda con x^β, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\beta e^{-x^2}(1-2x^2)}{x^\beta}=1,$$

quindi

$$\int_0^1 x^\beta e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx$$

esiste finito se e solo se $\beta > -1$. Quando $x \to \infty$, il problema non si pone perché

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta e^{-x^2}(1-2x^2)}{e^{-x}} = 0,$$

quindi l'integrale su $[1, \infty)$ è finito per ogni β. In conclusione, l'integrale assegnato esiste finito se e solo se $\beta > -1$.

Procediamo ora a calcolare l'integrale in questione per $\beta = 0$. Una semplice integrazione per parti fornisce

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx &= \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty x\left[(-2x)e^{-x^2}\right]\,dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx + \left[xe^{-x^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 0.\end{aligned}$$

Si noti che non occorre nemmeno sapere che

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

bensì basta che sia finito.