Correzione del quarto compito di Analisi 1 e 2

Stra Federico*

13 gennaio 2015

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + 3n}{\alpha n^2 + 10} \right)^n .$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, quindi possiamo applicare il criterio della radice. Si ha che

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 + 3n}{\alpha n^2 + 10} \right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 3n}{\alpha n^2 + 10} = \begin{cases} 1/\alpha & \text{se } \alpha > 0, \\ \infty & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Da ciò segue che la serie converge per $\alpha > 1$ e diverge per $0 \leq \alpha < 1$.

Il caso restante, $\alpha = 1$, si studia facilmente: infatti per $n > 3$ vale

$$\frac{n^2 + 3n}{n^2 + 10} > 1.$$

Avendo termini definitivamente maggiori di 1, la serie diverge.

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x + 1}{x} - \frac{1}{\log(x + 1)} \right) .$$

Soluzione

Andare a vedere l'esercizio 4 del secondo compitino dell'anno 2013-2014.

* stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 2

Testo

Scrivere, per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, le soluzioni dell'equazione

$$u'' + u = 1/\cos x.$$

Soluzione

Una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata $u'' + u = 0$ è data da $\{\cos x, \sin x\}$. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si adotta il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, ovvero si cerca una soluzione della forma $u(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$. Come visto a lezione, ci si riduce a risolvere il sistema lineare wronskiano

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = 1/\cos x. \end{cases}$$

Sommando la prima equazione moltiplicata per $\sin x$ e la seconda moltiplicata per $\cos x$ si ricava $c_2'(x)[\sin^2 x + \cos^2 x] = 1$, da cui $c_2(x) = x$. Dalla prima equazione ora si deduce $c_1'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}$, da cui $c_1(x) = \log(\cos x)$.

Le soluzioni solo allora

$$u(x) = [\log(\cos x) + a]\cos x + (x + b)\sin x, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 (solo Analisi 2)

Testo

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme di numeri reali

$$A = \{\, x + x^{-n} \;:\; x > 0,\ n \in \mathbb{N}_+ \,\}.$$

Soluzione

Si ha che $\lim\limits_{x\to\infty} x + x^{-n} = +\infty$, quindi $\sup A = +\infty$. Inoltre, almeno uno tra x e x^{-n} è maggiore o uguale a 1, pertanto $\inf A \geq 1$. Mostriamo che è proprio $\inf A = 1$.

Cerchiamo un punto di minimo interno x_n della funzione $x + x^{-n}$. Ponendo uguale a 0 la derivata si trova

$$\frac{d(x + x^{-n})}{dx} = 1 - nx^{-n-1} = 0,$$

da cui

$$x_n = n^{1/(n+1)}.$$

Il valore della funzione in questo punto stazionario (non stiamo neanche a verificare che sia veramente di minimo, non ci serve) è

$$x_n + x_n^{-n} = n^{1/(n+1)} + n^{-n/(n+1)}.$$

Quando n tende a $+\infty$, questo valore tende a 1, quindi effettivamente $\inf A = 1$.

Esercizio 3

Testo

Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, esiste finito l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{|x-1| \arctan(1/(x^2+1))}{|\log x|^\beta}\, dx.$$

Soluzione

Indichiamo con $f(x)$ la funzione integranda. Dobbiamo domandarci quali sono i punti in cui al variare di $\beta > 0$ possono svilupparsi delle singolarità. L'unico punto è $x = 1$, in corrispondenza del quale il denominatore si annulla. Vogliamo isolare i punti 0, 1 e inf, in corrispondenza dei quali dobbiamo studiare l'integrabilità di f. A tal fine, un possibile modo è considerando la seguente suddivisione in tre intervalli:

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\, dx + \int_{1/2}^2 f(x)\, dx + \int_2^\infty f(x)\, dx.$$

Procediamo ora a discutere la convergenza separatamente per ciascuno dei tre termini.

- Nell'intervallo $(0, 1/2]$ si ha $|x-1| \leq 1$ e $\arctan(1/(x^2+1)) \leq \pi/2$, quindi

  $$f(x) \leq \frac{\pi/2}{|\log x|^\beta},$$

  che è integrabile per ogni β. Il primo termine pertanto è sempre finito.

- Nell'intervallo $[1/2, 2]$ si ha

  $$\arctan(1/5) \leq \arctan(1/(x^2+1)) \leq \pi/2$$

  e

  $$\log 2\, |x-1| \leq |\log x| \leq \frac{1}{\log 2}\, |x-1|\,,$$

  quindi

  $$\frac{\arctan(1/5)(\log 2)^\beta}{|x-1|^{\beta-1}} \leq f(x) \leq \frac{\pi/2(\log 2)^{-\beta}}{|x-1|^{\beta-1}}.$$

  Pertanto il secondo termine è finito se e solo se $\beta < 2$.

- Nell'intervallo $[2, \infty)$ si ha che, per $x \to \infty$,

  $$f(x) \sim \frac{x}{x^2(\log x)^\beta},$$

  che è integrabile se e solo se $\beta > 1$. La precedente espansione asintotica si ricava osservando che

  $$x+1 \sim x, \qquad \text{e} \qquad \arctan(1/(x^2+1)) \sim 1/x^2.$$

Ne segue che l'integrale è finito se e solo se $1 < \beta < 2$.