Correzione del terzo compito
di Analisi 1 e 2

Stra Federico*

18 settembre 2014

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sin \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{\alpha}.$$

Soluzione

Per $t \to 0$ si ha $t - \sin t \sim t^3/6$, quindi

$$n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sin \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{\alpha} \sim n \left(\frac{1}{6} \frac{2^3}{n^{3/2}} \right)^{\alpha} = \frac{4^{\alpha}}{3^{\alpha}} n^{1-3/2\alpha}.$$

Pertanto la serie converge se e solo se

$$1 - \frac{3}{2}\alpha < -1 \Longleftrightarrow \alpha > \frac{4}{3}.$$

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} \sin^2(x-1)}{(x+1)^3 \log^2(x)}.$$

*stra@mail.dm.unipi.it

Soluzione

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\sin^2(x-1)}{(x+1)^3\log^2(x)} &= \frac{1}{8}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{\log^2(x)} \overset{H}{=} \\
&\overset{H}{=} \frac{1}{8}\lim_{x\to 1}\frac{2\sin(x-1)\cos(x-1)}{2\log(x)/x} = \\
&= \frac{1}{8}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\log(x)} \overset{H}{=} \\
&\overset{H}{=} \frac{1}{8}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{1/x} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Testo

Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, esiste finito l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^{2/\beta})}{\sin\sqrt{x} + x^{2/3}}\,dx.$$

Soluzione

Poniamo

$$f(x) = \frac{\arctan(x^{2/\beta})}{\sin\sqrt{x} + x^{2/3}}.$$

Consideriamo dapprima $\beta > 0$. Per $x \to +\infty$, $\arctan(x^{2/\beta}) \to \pi/2$. Perciò esiste $C \geq 1$ tale che $\arctan(x^{2/\beta}) > \pi/4$ per $x \geq C$. Inoltre, per $x \geq C$, $\sin\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \leq x^{2/3}$. Pertanto

$$\int_C^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_C^{+\infty} \frac{\pi/4}{2x^{2/3}}dx = +\infty,$$

quindi l'integrale diverge per ogni $\beta > 0$.

Consideriamo ora $\beta < 0$. Per $x \to 0$, $f(x) \sim \frac{\pi/2}{\sqrt{x}}$, quindi

$$\int_0^1 f(x)\,dx < +\infty \qquad \forall \beta < 0.$$

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{x^{2/\beta}}{x^{2/3}} = x^{2/\beta - 2/3}$,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

se e solo se

$$\frac{2}{\beta} - \frac{2}{3} < -1 \iff -6 < \beta < 0.$$

In conclusione, l'integrale esiste finito se e solo se $-6 < \beta < 0$.

Esercizio 3

Testo

Consideriamo la funzione $F(x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{(1+\cos t)\arctan t}{1+t^2} dt.$$

1. Dimostrare che la funzione $F(x)$ risulta pari ($F(x) = F(-x)$), non negativa, uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

2. Dimostrare che $F(x) \le x^2$.

3. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}}.$$

Soluzione

1. Poniamo

$$f(t) = \frac{(1+\cos t)\arctan t}{1+t^2}.$$

La funzione $f(t)$ è dispari, quindi F è pari. Infatti

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt = \int_0^x f(-s)(-1)\,ds = \int_0^x f(s)\,ds = F(x).$$

Inoltre $f(t) \ge 0$ per ogni $t \ge 0$, quindi $F(x) \ge 0$ per $x \ge 0$; ma F è pari, quindi $F(x) \ge 0$ anche per $x \le 0$. Infine, $|F'(x)| = |f(x)| \le \pi$, quindi F è lipschitziana, dunque uniformemente continua.

2. Per la parità di F, è sufficiente considerare $x \ge 0$. Poniamo $G(x) = x^2 - F(x)$. Abbiamo $G(0) = 0$ e

$$G'(x) = 2x - \frac{(1+\cos x)\arctan x}{1+x^2} \ge 2x - \frac{2x}{1} = 0 \qquad \forall x \ge 0,$$

quindi $G(x) \ge 0$, ovvero $F(x) \le x^2$.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)\arctan x}{2x(1+x^2)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.\end{aligned}$$

Per il secondo limite, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \le \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{1+t^2} dt < +\infty,$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$