Correzione del primo compito di Analisi 1 e 2

Stra Federico*

4 luglio 2014

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n^2}^{n^3} \sin^\alpha(1/x)\, dx.$$

Soluzione

Osserviamo che per ogni $x > 0$ vale $\sin(1/x) < 1/x$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1,$$

esiste $\bar{x}$ tale che per ogni $x > \bar{x}$ si abbia $\frac{1}{2}\frac{1}{x} < \sin(1/x)$. In definitiva, il problema assegnato è equivalente a stabilire la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{x^\alpha}\, dx. \tag{1}$$

Supponiamo ora $\alpha > 1$. Possiamo integrare il generico addendo della serie

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{n^2}^{n^3} = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{2(\alpha-1)}} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

e, siccome il termine nella parentesi tonda va a 1, la serie (1) è equivalente a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2(\alpha-1)}},$$

che converge se e solo se $2(\alpha - 1) > 1$, ovvero $\alpha > 3/2$.

Ora, abbiamo fatto queste considerazioni supponendo $\alpha > 1$. Tuttavia, siccome la serie (1) è monotona decrescente come funzione di α (perché ogni addendo lo è) e siccome abbiamo dimostrato che per $\alpha = 3/2$ diverge, essa divergerà anche per tutti gli $\alpha \leq 1$.

In conclusione, la serie di partenza converge per $\alpha > 3/2$ e diverge se $0 < \alpha \leq 3/2$.

* stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{5x} \frac{1-\cos t}{t^2} dt.$$

Soluzione

Poiché

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

si ha che esiste $\bar{x} > 0$ tale che

$$\frac{1}{4} < \frac{1-\cos t}{t^2} < 1 \qquad \text{per ogni } t \in (0, \bar{x}).$$

Allora

$$x = \int_x^{5x} \frac{dt}{4} < \int_x^{5x} \frac{1-\cos t}{t^2} dt < \int_x^{5x} dt = 4x \qquad \text{per ogni } x \in (0, \bar{x}/5),$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{5x} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = 0.$$

Siamo nelle ipotesi sotto cui si può applicare de L'Hopital, e così facendo si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{5x} \frac{1-\cos t}{t^2} dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \left[5\frac{1-\cos(5x)}{(5x)^2} - \frac{1-\cos x}{x} \right] = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

In alternativa, si può sfruttare il seguente fatto: se $f(x)$ è continua in 0, allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt = f(0).$$

Presa la funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & x = 0, \end{cases}$$

si può allora calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{5x} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{5}{5x}\int_0^{5x} f(t)dt - \frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt \right] = 5f(0) - f(0) = 2.$$

Esercizio 2

Testo

Scrivere le soluzioni dell'equazione

$$u'' - 3u' + 2u = e^x/(e^x + 1).$$

Soluzione

Troviamo le soluzioni dell'omogenea. Il polinomio associato all'equazione lineare a coefficienti costanti è $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, che ha come radici $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Le soluzioni dell'omogenea sono quindi $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, con C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$.

Per trovare una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, bisogna risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0, \\ c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = e^x/(e^x + 1). \end{cases}$$

Dividendo per e^x, questo sistema si può semplificare in

$$\begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^x, \\ c_1'(x) + 2c_2'(x)e^x = 1/(e^x + 1). \end{cases}$$

Si ricava allora $c_2'(x) = e^{-x}/(e^x + 1)$, da cui integrando (per esempio con la sostituzione $t = e^x$) si ottiene

$$c_2(x) = -e^{-x} + \log(1 + e^{-x}).$$

Similmente, $c_1'(x) = -1/(e^x + 1)$, da cui

$$c_1(x) = \log(1 + e^{-x}).$$

In conclusione, le soluzioni sono

$$\log(1 + e^{-x})(e^x + e^{2x}) + C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \qquad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3

Testo

Consideriamo, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, la funzione f_a definita per $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = e^{-|x|}\sqrt{|a^2 - x^2|}.$$

1. Dimostrare che, per ogni a fissato, la funzione $f_a(x)$ ammette punti di massimo e punti di minimo relativo.

2. Dimostrare che, per ogni a fissato, la funzione $f_a(x)$ ammette massimo assoluto. Chiamiamo $M(a)$ tale valore di massimo assoluto.

3. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{a \to 0} M(a).$$

Soluzione

1. Osserviamo che $f_a(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Siccome $f_a(a) = 0$, $x = a$ è un punto di minimo (assoluto). Inoltre sul compatto $[-a, a]$ ammette massimo in un punto interno (perché f_a non è identicamente nulla, ma agli estremi vale 0), quindi esiste un punto di massimo relativo.

2. Siccome $f_a \geq 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} f_a(x) = 0$, esiste un punto di massimo assoluto.[1] Al fine di risolvere il punto successivo, ci converrà tuttavia analizzare meglio la situazione e determinare il valore massimo $M(a)$.

   Osserviamo che $f_a(x)$ è derivabile ovunque tranne che nei punti $x = 0$ e $x = \pm a$, in cui vale rispettivamente a e 0. Inoltre $f_a(x)$ è pari, quindi ci possiamo limitare a studiare i massimi in $[0, \infty)$.

   In $(0, a)$ la derivata è

$$f_a'(x) = -e^{-x} \cdot \frac{(a^2 - x^2) + x}{\sqrt{a^2 - x^2}} < 0,$$

   quindi non ci sono punti stazionari e $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

   In (a, ∞) la derivata è

$$f_a'(x) = -e^{-x} \cdot \frac{x^2 - x - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

   Il numeratore si annulla solo per x uguale a

$$x_0 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2} < 0 \qquad \text{o} \qquad x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2} > a,$$

   quindi in (a, ∞) c'è un solo punto stazionario, che pertanto deve essere di massimo (perché $f_a(a) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0$, quindi almeno un massimo esiste). Ricordando che tale punto di massimo soddisfa $x_1^2 - a^2 = x_1$, si può calcolare agevolmente il valore massimo

$$f_a(x_1) = e^{-x_1}\sqrt{x_1} = e^{-\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}}.$$

   Da quanto detto, si ha che

$$M(a) = \max\left\{a, e^{-x_1(a)}\sqrt{x_1(a)}\right\}.$$

3. Notiamo che

$$\lim_{a\to 0} x_1(a) = 1,$$

   quindi

$$\lim_{a\to 0} M(a) = \max\left\{0, e^{-1}\sqrt{1}\right\} = \frac{1}{e}.$$

[1] Questo dovrebbe essere un fatto noto; o comunque, per chi non lo conoscesse, risulta essere un esercizio semplice e istruttivo.