Correzione del primo compito di Analisi 1 e 2

Stra Federico*

16 giugno 2014

Esercizio 1

Testo

Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+t)^{nt}}{n!}.$$

Soluzione

La serie assegnata ha lo stesso comportamento (convergenza o no) della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{nt}}{n!}. \tag{1}$$

Infatti

$$\frac{(n+t)^{nt}}{n!} = \frac{(n+t)^{nt}}{n^{nt}} \cdot \frac{n^{nt}}{n!}$$

ed esiste finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+t)^{nt}}{n^{nt}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{nt} = e^{t^2}.$$

Studiamo quindi la convergenza della serie (1). Se $t \geq$ la serie diverge perché i termini non sono infinitesimi:

$$\frac{n^{nt}}{n!} \geq \frac{n^n}{n!} \geq 1.$$

Se $0 < t < 1$, applicando il criterio del rapporto si trova che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)t}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{nt}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{nt} \cdot \frac{(n+1)^t}{n+1} = e^t \lim_{n\to\infty} (n+1)^{t-1} = 0,$$

quindi la serie converge.

*stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 1 (solo Analisi 2)

Testo

Calcolare, se esiste, il limite,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\cos x)}{\log(\tan(2x))}.$$

Soluzione

Applicando de l'Hopital, ci riduciamo a calcolare, se esiste, il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-\cos x}\cdot \sin x}{2\cdot \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\cdot \frac{1}{\cos^2(2x)}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)(2\sin x\cos x)\cos(2x)}{2(1-\cos x)} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\cdot (\cos x\cos(2x)) = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{x^2/2+o(x^2)} = 2.
\end{aligned}$$

Visto che il limite del rapporto delle derivate esiste, esso coincide con il limite assegnato.

Esercizio 2

Testo

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Definiamo, per $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt.$$

1. Definire $g(x)$ anche per $x = 0$ in modo che risulti $g \in C(\mathbb{R})$.
2. Dire se $g(x)$, così definita, risulta di classe $C^1(\mathbb{R})$ e, qualora lo sia, calcolare $g'(0)$.

Soluzione

1. Per il teorema del valore medio, $g(x) = f(\xi(x))$ con $\xi(x) \in (0, x)$ se $x > 0$ e $\xi(x) \in (x, 0)$ se $x < 0$. Siccome $\xi(x) \to 0$ quando $x \to 0$, si ha dunque

   $$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(\xi(x)) = f(0).$$

   Ne segue che se si definisce $g(0) = f(0)$, allora $g \in C(\mathbb{R})$.

2. Calcoliamo il limite della derivata

   $$\begin{aligned}
   \lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2} &\overset{H}{=} \\
   \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) + xf'(x) - f(x)}{2x} &= \frac{f'(0)}{2}.
   \end{aligned}$$

   Da ciò si deduce, grazie al teorema di Lagrange, che $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $g'(0) = \frac{f'(0)}{2}$.

Alternativamente, si poteva calcolare direttamente

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - xf(0)}{x^2} \overset{H}{=}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{f'(0)}{2},$$

ma poi per dimostrare che $g \in C^1(\mathbb{R})$ occorreva ugualmente calcolare $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$.

Esercizio 3

Testo

1. Dire per quali valori di α, β e γ in $\mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, esiste finito l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta} |\sin x|^\gamma \, dx.$$

2. Calcolare tale integrale quando $\alpha = 3$, $\beta = 2$ e $\gamma = 0$.

Soluzione

1. Osserviamo per prima cosa che la funzione integranda è non negativa. Inoltre si ha che
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|^\gamma \, dx < +\infty$$
se e solo se $\gamma > -1$. Pertanto nel seguito si supporrà sempre $\gamma > -1$, altrimenti l'integrale diverge.

   Dividiamo ora due casi.

   - Supponiamo $\beta = 0$.
     L'integrale
     $$\int_0^1 x^\alpha e^{-1} |\sin x|^\gamma \, dx < +\infty$$
     se e solo se $\alpha + \gamma > -1$.
     L'integrale
     $$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-1} |\sin x|^\gamma \, dx < +\infty$$
     se e solo se $\alpha < -1$.
     In conclusione, quando $\beta = 0$, l'integrale converge se e solo se
     $$\begin{cases} \gamma > -1, \\ \alpha < -1, \\ \alpha + \gamma > -1, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \gamma > 0, \\ -1 - \gamma < \alpha < -1. \end{cases}$$

   - Supponiamo ora $\beta > 0$.
     L'integrale
     $$\int_0^1 x^\alpha e^{-x^\beta} |\sin x|^\gamma \, dx < +\infty$$
     se e solo se $\alpha + \gamma > -1$.

Invece l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta} \, |\sin x|^\gamma \, dx < +\infty$$

sempre (sotto le chiare ipotesi $\gamma > -1$ e $\beta > 0$).
Riassumendo, quando $\beta > 0$, l'integrale converge se e solo se

$$\gamma > -1, \quad \alpha + \gamma > -1.$$

2. Dobbiamo calcolare

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

Osserviamo che

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Allora

$$\int x^2 x e^{-x^2} = -\frac{x^2}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int 2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1)$$

e

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$