# Correzione del primo compitino di Analisi 1 e 2

Del Nin Giacomo[*] Ferrigo Marco[†] Stra Federico[‡]

11 dicembre 2013

## Esercizio 1

### Testo

Sia, con $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato,

$$x_n = \frac{1}{[n^2+1]^\alpha} + \frac{1}{[n^2+2]^\alpha} + \cdots + \frac{1}{[n^2+(n-1)]^\alpha} + \frac{1}{[n^2+n]^\alpha}.$$

Calcolare, se esiste, al variare di $\alpha$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

### Soluzione

- Consideriamo $\alpha \leq 0$.

  Osserviamo che:

  $$x_n = \frac{1}{(n^2+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n^2+n)^\alpha} = (n^2+1)^{-\alpha} + \cdots + (n^2+n)^{-\alpha} \geq n$$

  in quanto, per ogni $k = 1, \ldots, n$ vale:

  $$(n^2+k)^{-\alpha} \geq 1$$

  e siccome $x_n$ è composto da $n$ termini, ottengo appunto $x_n \geq n$.

  Perciò ottengo:

  $$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

- Caso $\alpha > 0$.

  Osservo che valgono le maggiorazioni[1]:

  $$a_n = \frac{n}{(n^2+n)^\alpha} \leq x_n \leq \frac{n}{(n^2+1)^\alpha} = b_n.$$


[*] delnin@mail.dm.unipi.it

[†] ferrigo@mail.dm.unipi.it

[‡] stra@mail.dm.unipi.it


[1] Si potrebbero fare maggiorazioni più raffinate per concludere più velocemente.

Questo perché

$$\frac{1}{(n^2+1)^\alpha} \geq \frac{1}{(n^2+2)^\alpha} \geq \cdots \geq \frac{1}{(n^2+n-1)^\alpha} \geq \frac{1}{(n^2+n)^\alpha}$$

e una somma di $n$ termini è maggiore di $n$ volte il minore, ed è minore di $n$ volte il maggiore.

A questo punto osservo che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-2\alpha}}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} = \frac{\lim n^{1-2\alpha}}{\lim\,(1+\frac{1}{n})^\alpha}$$

e dunque, siccome il limite a denominatore è 1 per ogni $\alpha$, se $1-2\alpha > 0$ ($0 < \alpha < 1/2$):

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Analogamente

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-2\alpha}}{(1+\frac{1}{n^2})^\alpha}$$

e dunque, se $\alpha > 1/2$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

e perciò $\lim x_n = 0$ poiché $x_n$ è a termini positivi.

Rimane il caso $\alpha = 1/2$, e sempre con le stesse maggiorazioni, e con il teorema dei due carabinieri:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

si ottiene $\lim x_n = 1$.

Ricapitolando:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

## Commenti

1. Alcuni hanno affermato che *se sommo n termini che vanno a zero, la somma va a* 0[2]. Questo è un errore molto grave.

   Per capire che tale ragionamento non funziona consideriamo la successione:

   $$x_n = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad \text{n volte}$$

   ciascun termine $1/n$ tende a 0 per $n \to \infty$, ma $x_n = 1$ per ogni $n$, e quindi

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

   e non 0 come concluderebbe il ragionamento fallace esposto all'inizio.

[2]A volte cercando di giustificare dicendo: *il limite della somma è la somma dei limiti.* Bisogna però capire quando questa frase ha senso ed è corretta e quando, come in questo caso, non ha senso e non è corretta.

2. Molti hanno affermato che, siccome $x_n$ è la somma di $n$ termini, è il termine parziale di una serie. Non è affatto così. Cerco di spiegare perché: una serie è del tipo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

La somma parziale è:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Ovvero se scriviamo i primi termini:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1\\
x_2 &= 1+\frac{1}{4}\\
x_3 &= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\\
x_4 &= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\\
x_5 &= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}
\end{aligned}$$

osserviamo che vale $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{(n+1)^2}$.

Nel nostro caso invece

$$x_n=\frac{1}{(n^2+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n^2+n)^\alpha}$$

e se scrivo i primi termini, ad esempio con $\alpha=1$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\\
x_2 &= \frac{1}{5}+\frac{1}{6}\\
x_3 &= \frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\\
x_4 &= \frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\\
x_5 &= \frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

e risulta chiaro che non si tratta di una serie avente $x_n$ come somma parziale[3].

3. Alcuni hanno svolto dei limiti per $n\to\infty$ e trovato un risultato che dipende da $n$, tipo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)]^\alpha}=\frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Questo non ha senso, perché il termine $n$ che compare a destra non è definito.

[3] Attenzione a questo passaggio: solo perché passando da un termine all'altro cambia la scrittura dei termini, non posso concludere che non si tratti di una serie. Anzi, ogni successione numerica crescente può essere vista come una serie. Ciò che affermo è che di sicuro il nostro $x_n$ non è la somma parziale di una serie.

4. Alcuni hanno effettuato un passaggio di questo tipo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n^2+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n^2+n)^\alpha} &&= \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \left( \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} \right) &&= \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

giustificando così: ciascun termine nella parentesi tende ad 1, quindi la somma tende ad $n$.

Questo ragionamento non è valido, non si può passare al limite *un pezzo alla volta*.

Tuttavia è un passaggio che può trarre in inganno, innanzitutto perché il risultato è corretto. Va però giustificato in modo preciso, ad esempio così:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \left( \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} \right) &&= \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{2\alpha}} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} \right) &&= \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{2\alpha}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} \right).
\end{aligned}$$

E ora si deve verificare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} \right) = 1$$

che va fatto di nuovo con il teorema dei carabinieri, sostanzialmente come indicato nella soluzione.

Quindi chi ha svolto questo passaggio senza troppa cura ha in pratica dato per scontata la parte cruciale dell'esercizio.

5. Molti hanno deciso di svolgere solo dei casi particolari. Se ci si limita a concludere: svolgo i casi $\alpha = -2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$, quindi risolvo l'esercizio per questi valori di $\alpha$, non si commettono errori, anche se l'esercizio risulta svolto molto parzialmente.

   Se invece dite: considera $\alpha > \frac{1}{2}$, ad esempio $\alpha = 2$, e pretendete di trarre conclusioni generali, l'errore logico è molto grave. Inoltre può condurre a risultati disastrosi, considerate il seguente esempio:

   Risolvo l'esercizio per $0 < \alpha < 1$, ad esempio $\alpha = \frac{1}{2}$.

   Si svolge questo caso correttamente e si conclude che $x_n \to 1$ per ogni $0 < \alpha < 1$, mentre vale un risultato completamente diverso!

   In definitiva, non si può dimostrare per esempi.

6. Alcuni utilizzano la maggiorazione:

$$a_n = \frac{n}{(n^2+n)^\alpha} \leq x_n \leq \frac{n}{(n^2+1)^\alpha} = b_n.$$

anche nel caso $\alpha < 0$. Non è valida, provare per credere!

### Valutazione

La maggior parte dei compiti ha seguito più o meno lo schema risolutivo presentato nella soluzione; a seconda della precisione e della correttezza di passaggi e giustificazioni, sono stati dati punteggi in questa fascia:

- Risolto il caso $\alpha \leq 0$: 0-3 punti.
- Risolto il caso $0 < \alpha < \frac{1}{2}$: 0-2 punti.
- Risolto il caso $\alpha = \frac{1}{2}$: 0-2 punti.
- Risolto il caso $\alpha > \frac{1}{2}$: 0-3 punti.

A chi ha risolto l'esercizio solo in casi parziali, oppure seguendo una linea diversa e non del tutto completa, ho cercato di dare i seguenti punti bonus:

- Risolto il caso $\alpha \geq 1$: 0-2 punti.
- Risolti alcuni sottocasi di $\alpha \leq 0$: 0-2.
- Buon utilizzo del teorema del confronto (o dei due carabinieri): 0-3 punti.

Nel caso degli errori più comuni ho applicato (per quanto possibile uniformemente) queste penalità:

- Affermato (o utilizzato) che una somma di $n$ termini infinitesimi è infinitesima, come descritto nel commento 1: il voto scende a 2.
- Affermato (o utilizzato) che la successione $x_n$ è la successione di somme parziali di una serie, come descritto nel commento 2: il voto scende a 2.
- Svolto un limite in cui $n$ è l'indice che va all'infinito, e nel risultato compare $n$, come descritto nel commento 3: il voto scende a 2.
- Affermato (o utilizzato) che una somma di $n$ termini che convergono a 1 si può considerare come $n$ (e non giustificato), come nel commento 4: il voto scende a 5;
- Se vengono svolti solo casi particolari, assegno un punto ad ogni caso se svolto bene, fino a un massimo di 4 punti.
- Utilizzata la maggiorazione:

  $$a_n = \frac{n}{(n^2+n)^\alpha} \leq x_n \leq \frac{n}{(n^2+1)^\alpha} = b_n.$$

  anche nel caso $\alpha < 0$: -3 punti.

## Esercizio 2

### Testo

Sia $a_n$ una successione positiva e crescente. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})(1+a_n)}.$$

## Soluzioni

Osserviamo come prima cosa che, intendendo i termini positiva e crescente in senso debole ($a_n \geq 0$ e $a_{n+1} \geq a_n$), la successione $a_n$ potrebbe esssere identicamente nulla. In questo caso la serie da studiare è anch'essa nulla perchè ogni termine lo è.

Se invece $a_n$ non è identicamente nulla significa che esiste un $\bar{n}$ tale che $a_{\bar{n}} > 0$ e quindi per la crescenza si avrà $a_n \geq a_{\bar{n}} > 0$ per ogni $n \geq \bar{n}$. In questo caso ci si può ridurre a considerare la successione $a_n$ sempre positiva, visto che gli eventuali termini nulli all'inizio non danno contributi alla serie.

Nel seguito consideriamo quindi $a_n > 0$ per ogni $n$.

Osserviamo anche che essendo la serie a termini positivi essa può solamente convergere a un valore finito oppure divergere a $+\infty$.

**Criterio del rapporto** Chiamando

$$b_n = \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$

calcoliamo il rapporto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n+1})}\frac{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n(1+a_{n+1})}.$$

Il criterio del rapporto afferma che se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Osserviamo che essendo $a_n$ una successione crescente essa ammette limite, finito o infinito, coincidente con $\sup_n\{a_n\}$. Per la positività della successione questo limite può essere solo un reale $l > 0$ oppure $+\infty$. Distinguiamo quindi due casi:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l > 0$

  Usando il teorema sul limite del prodotto di successioni convergenti si ottiene

  $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n(1+a_{n+1})} = \frac{l}{l(1+l)} = \frac{1}{1+l} < 1$$

  perchè $l > 0$, e dunque la serie converge.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

  In questo caso conviene riscrivere il rapporto come

  $$\frac{1}{a_n}\frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}}$$

  e osservare che per $n \to +\infty$ la quantità $\frac{1}{a_n}$ tende a zero mentre $\frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{a_{n+1}}}$ tende a 1. Dunque il loro prodotto tende a zero e anche in questo caso

  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0 < 1$$

  e dunque la serie converge.

In conclusione la serie converge per qualsiasi scelta della successione $a_n$ positiva e crescente.

**Criterio del confronto** Una seconda soluzione possibile è il confronto con una serie geometrica convergente. Vogliamo dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a_1)^{n-1}} < +\infty \tag{1}$$

L'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che la seconda è una serie geometrica con ragione $< 1$ (infatti $a_1 > 0$). Dimostriamo quindi la prima.

Osserviamo che per la crescenza di $a_n$ vale per ogni $n$ che

$$1 + a_1 \leq 1 + a_n$$

da cui

$$(1+a_1)^n \leq (1+a_1)\cdots(1+a_n)$$

e dunque

$$\frac{1}{(1+a_1)^n} \geq \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}.$$

Si ottiene:

$$\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \leq \frac{\cancel{1+a_n}}{(1+a_1)\cdots\cancel{(1+a_n)}} = \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} \leq \frac{1}{(1+a_1)^{n-1}}$$

da cui si ottiene la (1) avendo maggiorato la serie termine a termine.

Nota: se $n = 1$ il termine $a_{n-1}$ a denominatore nell'ultima catena di disuguaglianze non è definito, perché verrebbe $a_0$. Tuttavia si può osservare che la disuguaglianza che serve a noi (quella fra il primo e l'ultimo termine) è comunque verificata per $n = 1$.

**Serie telescopica** Questa soluzione mostra che, al variare di $a_n$ con le proprietà date, la serie di partenza non solo converge ma converge sempre a 1 (tranne il caso in cui $a_n$ è identicamente nulla). Possiamo infatti scrivere per $n \geq 2$

$$\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = \frac{(1+a_n)-1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = \frac{a_1}{1+a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} =$$

$$= \frac{a_1}{1+a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \right) =$$

$$= \frac{a_1}{1+a_1} + \left( \frac{1}{1+a_1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \right) \tag{2}$$

in quanto i termini intermedi si cancellano. Ora, siccome

$$0 \leq \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \leq \frac{1}{(1+a_1)^n}$$

e l'ultimo pezzo va a zero, per il teorema dei carabinieri anche il limite in (2) fa zero e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1} = 1.$$

## Errori comuni

- Molti hanno scritto che $(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) = (1 + a_n)!$ che non ha molto senso, infatti non è detto che $(1 + a_n)$ sia intero. Anche se lo fosse non vale in generale l'uguaglianza (non vale neanche una disuguaglianza in uno dei versi). Questo errore non è stato fatto pesare troppo nel caso in cui il punto esclamativo fosse solo una notazione particolare per indicare il prodotto $(1 + a_1) \cdots (1 + a_n)$.

- Molti hanno assunto automaticamente che la successione $a_n$ tendesse a $+\infty$, oppure viceversa che tendesse ad un limite finito. Bisognava invece distinguere i 2 casi, magari dicendo perché erano gli unici 2 possibili.

- Il criterio del rapporto afferma che una condizione sufficiente affinché una serie a termini positivi $\sum b_n$ converga è che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1.$$

  Sia il limite sia il minore stretto sono fondamentali per il criterio. Alcuni non hanno considerato il limite, altri hanno dimostrato che vale il minore o uguale. Altri ancora hanno tentato di dimostrare che $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ per ogni $n$, che è falsa (è vera solo a partire da un certo $\bar{n}$) la quale comunque non implica che il limite sia minore stretto di 1. Infatti si può prendere per esempio $b_n = \frac{1}{n}$ per la quale $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ eppure $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$

- Un errore comune è stato sbagliare il conto del rapporto tra due termini successivi della serie, infatti in molti non hanno semplificato il fattore $(1 + a_1)$ a numeratore. Questo errore ha penalizzato i compiti in modo diverso in quanto alcuni sono comunque riusciti a concludere il caso in cui $\lim a_n = +\infty$, per il quale questo errore era trascurabile, altri invece si sono fermati o hanno sbagliato il seguito.

- Alcuni hanno scritto che un prodotto infinito di termini $> 1$ diverge. Questo in generale è falso, basta considerare

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}$$

  in cui ogni termine è $> 1$, eppure il risultato è 2. La conclusione però è vera nel caso in cui tutti i fattori sono maggiori o uguali ad un certo $c > 1$.

## Tabella dei punteggi (indicativa)

- Dire esplicitamente che $a_n$ ha sempre limite, finito e positivo oppure $+\infty$, e motivare perché **+2**

- Fare giusto il conto del rapporto **+1**

- Enunciare o utilizzare il criterio del rapporto correttamente (nel senso di dire che bisogna considerare il limite e che questo deve essere minore stretto di 1) **+1**

- Svolgere il caso $\lim a_n = +\infty$ (penalizzato se non viene scritto esplicitamente che si sta considerando questo caso, oppure nel caso in cui si dia per buono che questo è l'unico) **+3**

- Svolgere il caso $\lim a_n = l < +\infty$ (penalizzato se non viene scritto esplicitamente che si sta considerando questo caso, oppure nel caso in cui si dia per buono che questo è l'unico)**+3**

Si tenga conto di un oscillazione di $\pm 2$ dovuta a chiarezza dell'esposizione, giustificazione dei passaggi e altro. Questa tabella riguarda principalmente il caso in cui si sia utilizzato il criterio del rapporto. Altri punteggi parziali sono stati attribuiti per diversi tipi di soluzione oppure per risultati parziali (maggiorazioni, altri criteri enunciati in modo corretto ma svolti solo in parte etc.).

# Esercizio 3

## Testo

Sia $k$ un intero $\geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Studiare, al variare di $k$ e di $\beta$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^k}{((kn)!)^\beta}.$$

## Soluzione

Siccome la serie è a termini positivi, possiamo applicare il criterio del rapporto. Quest'ultimo prevede di calcolare il seguente limite:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^k}{[[k(n+1)!]]^\beta} \cdot \frac{((kn)!)^\beta}{(n!)^k} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k (n!)^k}{(kn+k)^\beta \cdots (kn+1)^\beta ((kn)!)^\beta} \cdot \frac{((kn)!)^\beta}{(n!)^k} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(kn+k)^\beta \cdots (kn+1)^\beta} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k (1+\frac{1}{n})^k}{(kn)^{\beta k} (1+\frac{1}{n})^\beta \cdots (1+\frac{1}{kn})^\beta} = \\
&= k^{-\beta k} \left(\lim_{n\to\infty} n^{k(1-\beta)}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(1+\frac{1}{n})^\beta \cdots (1+\frac{1}{kn})^\beta}\right) \overset{\bigstar}{=} \\
&= k^{-\beta k} \lim_{n\to\infty} n^{k(1-\beta)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-\beta < 0, \text{ ovvero } \beta > 1, \\ k^{-k} & \text{se } 1-\beta = 0, \text{ ovvero } \beta = 1, \\ +\infty & \text{se } 1-\beta > 0, \text{ ovvero } \beta < 1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{3}$$

dove il passaggio contrassegnato da $\overset{\bigstar}{=}$ vale perché il limite della frazione è 1, in quanto ci sono $k+1$ fattori (una quantità indipendente da $n$) ognuno dei quali tende a 1, pertanto si possono sfruttare le proprietà delle operazioni tra limiti (nello specifico, quelle sul prodotto e rapporto).[4]

Dal criterio del rapporto, segue pertanto che la serie diverge se $\beta < 1$, mentre converge se $\beta > 1$ oppure se $\beta = 1$ e $k > 1$ (infatti in tal caso $k^{-k} < 1$).

[4] A tal proposito, si consiglia di leggere attentamente il relativo commento alla fine: cfr. (4).

Resta da trattare separatamente il caso $\beta = k = 1$: con questa scelta dei parametri la serie diverge in quanto diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

## Valutazione

Questo esercizio si prestava molto bene a essere risolto per casi, eventualmente anche solo in modo parziale. Per esempio, molti hanno trattato separatamente $\beta < 0$ e $\beta > 0$, il che poteva tornare comodo soprattutto se si faceva uso di disuguaglianze per mostrare la divergenza per $\beta < 1$, disuguaglianze che al cambiare di segno di $\beta$ spesso si invertono.

Per tale motivo, il punteggio è stato prevalentemente assegnato sulla base della casistica trattata. A grandi linee, il valore è stato il seguente:

- caso $\beta \leq 0$: +2,
- caso $\beta = 1$: +2,
- caso $k = 1$: +4,
- caso $k > 1$: +6,
- caso $\beta \geq k$: +1.

I punteggi sono ridondanti, perché compito per compito è risultato rilevante l'approccio seguito per suddividere il problema.

Inoltre il punteggio pieno è stato attribuito a chi ha risolto *bene* il relativo caso, ovvero motivando chiaramente e giustificando in modo appropriato. Chi ha trattato solo parzialmente un caso (per esempio discutendo solo la convergenza, ma non la divergenza), oppure ha omesso dei passaggi chiave, ha ricevuto solo parte del massimo.

Ha infine ricevuto almeno 2 chi ha calcolato correttamente il rappporto, mentre è stato penalizzato chi, nell'applicare il criterio del rapporto non ha calcolato il limite.[5]

## Commenti

**Errori gravi** Tra gli errori più gravi sono sicuramente da annoverare quelli relativi ai concetti di limite e serie.

- Ad alcuni non è chiaro il ruolo della variabile che compare come indice di una serie o di un limite. Essa è una variabile locale che esiste solo all'interno della serie o del limite. Per esempio,

  $$\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} n!$$

  non è corretto (non ha proprio senso), perché si sta facendo riferimento alla $n$ fuori dallo spazio a lei adibito, che è dentro la serie.

  Similmente, non si può scrivere

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}$$

  perché la $n$ non può "sopravvivere" al processo di limite: il risultato del limite non può contenere la variabile $n$.

[5] Vedi commenti successivi.

- Alcuni fanno confusione con gli infinitesimi, sostenendo per esempio che

  ...la serie $1/n$ è definitivamente 0...

  oppure più in generale scrivono cose del tipo

$$\frac{n+1}{n+k} = \frac{1}{k} \qquad \text{invece di} \qquad \frac{n+1}{n+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k}.$$

- Sulla linea del punto precedente, alcuni affermano che un certo limite è un infinitesimo, quando invece un limite, se esiste, è per definizione un numero reale, o al più $\pm\infty$.

- Altri utilizzano impropriamente il concetto di infinito, dicendo per esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$$

  perché "l'infinito di sotto è più grande di quello di sopra", oppure per "la gerarchia dei diversi ordini di infinito". Tutte queste locuzioni hanno scarso fondamento matematico (almeno in questi termini) e vanno sostituite da un'argomentazione più rigorosa che provi la correttezza del limite di sopra.

**Errori con il fattoriale** Il fattoriale è stato il grande nemico in questo esercizio. Solo in una ridotta parte dei compiti è stato calcolato correttamente il rapporto fra due termini consecutivi della serie, che è

$$\frac{(n+1)^k}{(kn+1)^\beta \cdots (kn+k)^\beta}.$$

Tra gli errori più diffusi ci sono stati

$$(k(n+1))! = (kn+1)(kn)! \qquad\qquad (k(n+1))! = (kn+k)(kn)!$$
$$(kn)! = k^n n! \qquad\qquad (kn)! = k(n!).$$

Questo chiaramente ha comportato che il seguito della risoluzione avesse poco a che fare con il problema originario. Nel migliore dei casi, quando cioè la trattazione del limite (che veniva parecchio semplificato da questi errori) è stata svolta adeguatamente e sono state tratte le "giuste" conclusioni sulla serie, si è potuto raggiungere il punteggio di 6.

**Altri errori comuni**

- Una discreta quantità di persone ha discusso la convergenza della serie, trascurando del tutto la trattazione degli altri casi, forse pensando che ciò bastasse a dimostrarne la divergenza.

- Un dettaglio molto sottile da cogliere è stato il seguente: nel primo esercizio, come è già stato evidenziato, non è corretto affermare che

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{[n^2+1]^\alpha} + \cdots + \frac{1}{[n^2+n]^\alpha} \right) = 0$$

perché ognuno dei termini va a 0 e il limite della somma è la somma dei limiti; non è neppure corretto dire che[6]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[n^2+1]^\alpha}+\cdots+\frac{1}{[n^2+n]^\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{2\alpha}}$$

perché ogni addendo è asintotico a $1/n^{2\alpha}$; tuttavia nel terzo esercizio è corretto dire che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta\cdots\left(1+\frac{1}{kn}\right)^\beta}=1 \tag{4}$$

perché ogni fattore nelle parentesi tonde va a 1.

Da dove nasce questa differenza? Il punto chiave è che nei primi due casi il numero di termini da stimare (con limite o confronto asintotico) è variabile, cioè dipendente da $n$, mentre nell'ultimo caso questo numero è $k+1$, una quantità indipendente da $n$, una costante ai fini del calcolo del limite.

[6]Verranno fornite ulteriori spiegazioni ed esempi durante la correzione in classe.