

Sezione 1

Nozioni varie

1.1 Richiami di calcolo vettoriale

Sono già sufficientemente noti i concetti di *spazio vettoriale*, di *vettore applicato* a un punto dello spazio euclideo a tre dimensioni, prima immagine matematica dello spazio fisico che ci circonda, di **prodotto scalare**, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, fra due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , e di **prodotto vettore**, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, fra questi con la sua interpretazione, o definizione, geometrica, e le sue proprietà di linearità e anticommutatività. Non ripetiamo perciò questi concetti, ed in questo paragrafo ci limiteremo solo ad una esposizione delle loro proprietà principali. Prima dobbiamo mettere però in evidenza ciò che può essere chiamata la “*assialità*” della composizione “prodotto vettore $\cdots \wedge \cdots$ ”, o, a seconda del punto di vista, del risultato $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Il verso di \mathbf{c} viene determinato modo che la terna di vettori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ abbia un orientamento prefissato, fra i due possibili orientamenti circolari che può avere una terna ordinata di vettori non complanari applicata in un punto. La scelta normalmente fatta è quella per cui se la terna ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ è applicata in un punto e “esplosa” verso chi guarda, allora questi vede che i tre vettori si susseguono, nell’ordine dato, in senso antiorario. Ma questa scelta è convenzionale, e possiamo prendere anche l’orientazione opposta, cioè scegliere per verso del risultato $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ il verso opposto a quello precedente, in modo che stavolta la terna ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ abbia un orientamento orario. I vettori il cui verso è determinato dalla scelta dell’orientamento del prodotto vettore sono detti vettori *assiali* o *pseudovettori*, gli altri sono anche detti vettori *polari*.

Scelto un riferimento cartesiano di versori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$, possiamo scrivere che

$$\mathbf{c}_i \wedge \mathbf{c}_j = \pm \varepsilon_{ijk} \mathbf{c}_k, \quad (1.1)$$

in cui ε_{ijk} è il simbolo di permutazione (di Ricci), e dove va scelto il segno superiore (+) se l’orientamento circolare della terna $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ è concorde con quello del prodotto vettore, quello inferiore (−) nel caso contrario. Inoltre la (1.1) è stata scritta tenendo conto della cosiddetta “convenzione di Einstein”, secondo la quale il valore di una espressione monomia, in cui compaiono due indici ripetuti, è uguale alla somma dei valori che l’espressione assume per ogni determinazione possibile della coppia di indici ripetuti. In questo caso: $\varepsilon_{ijk} \mathbf{c}_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{c}_k$.

Sfruttando la linearità del prodotto vettore rispetto a ciascuno dei suoi fattori e la (1.1), possiamo verificare che

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (1.2)$$

dove $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_i$ e $b_j = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}_j$, il determinante formale sopra scritto va sviluppato secondo gli elementi della prima riga, ed il segno va scelto secondo la convenzione già esposta.

Il **doppio prodotto vettore** $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$ fra tre vettori dati nell'ordine, non ha più carattere assiale, è lineare in ciascuno dei suoi termini, ma non ha carattere associativo, risultando in generale che $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$. Possiamo verificare che

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \quad (1.3)$$

Consideriamo ora il **prodotto misto** $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Se i vettori in considerazione sono polari, questa espressione è il primo esempio di "scalare assiale", cioè di uno scalare il cui segno dipende dalla scelta dell'orientamento del prodotto vettore. *Il prodotto misto è nullo se e solo se i tre vettori sono linearmente dipendenti*

Ricordando il significato geometrico di $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$, è facile vedere che *considerato il parallelepipedo che ha come spigoli concorrenti in un vertice i tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (linearmente indipendenti) applicati in un punto, allora $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ è positivo, ed uguale al volume del parallelepipedo se l'orientamento della terna ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è concorde con quello del prodotto vettore, negativo, ma in modulo sempre uguale a tale volume, se i due orientamenti sono discordi.*

Ma il volume del parallelepipedo non cambia se invece di partire, sempre in senso circolare, dallo spigolo corrispondente al vettore \mathbf{a} , partiamo da quello corrispondente al vettore \mathbf{b} , oppure al vettore \mathbf{c} . Quindi:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.4)$$

Da queste relazioni deduciamo che *il prodotto misto non cambia se si inverte l'ordine degli operandi*:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}. \quad (1.4')$$

In un riferimento cartesiano risulta che

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (1.5)$$

con la solita avvertenza per la scelta del segno.

La denominazione "prodotto" data alle operazioni di composizione prodotto scalare e vettore, doppio prodotto e prodotto misto è corretta, perché se i vettori di partenza sono funzioni derivabili di un parametro, allora anche il risultato lo è, e la sua derivata si ottiene applicando formalmente a queste espressioni la nota regola di derivazione di un prodotto.

1.2 I tensori del secondo ordine

Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale reale a n dimensioni e dotato di prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, essendo \mathbf{a} e \mathbf{b} vettori di \mathcal{V} .

Diremo **tensore del secondo ordine**, o semplicemente **tensore** ogni applicazione lineare $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Se \mathbf{y} è l'immagine di $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ secondo T , il tensore corrispondente sarà indicato con $\tilde{\mathbf{T}}$, e scriveremo

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{x}, \quad \text{oppure} \quad \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x},$$

così come per ogni altro tensore, tranne quello “identico”, o “unitario”, o “l'unità”, corrispondente all'identità $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, che indicheremo con $\tilde{\mathbf{I}}$, $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{x}$, e quello nullo corrispondente all'applicazione che manda tutti i vettori nel vettore nullo, che indicheremo semplicemente con 0 (zero).

L'espressione $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}$ va opportunamente letta con la dizione $\tilde{\mathbf{T}}$ per \mathbf{x} , come sarebbe chiaramente suggerito dalla scrittura $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{x}$, che non useremo per brevità, per sottolineare fin dall'inizio che si tratta di un'operazione di composizione che gode delle proprietà formali dell'attributo “prodotto”, secondo le avvertenze esposte alla fine del paragrafo precedente.

Nel seguito faremo spesso riferimento al semplice *criterio di uguaglianza*

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}} \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}.$$

Indicato con $\{\mathbf{c}_i\}^*$ un *riferimento* di \mathcal{V} , cioè una sua *base ortonormale*, quindi tale che $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij}$, la relazione $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}$ dà luogo a una relazione lineare

$$y_i = T_{ij}x_j,$$

fra le componenti y_i di \mathbf{y} e quelle x_j di \mathbf{x} , che individua una matrice quadrata di ordine n , $[T_{ij}]$, che diremo la *matrice delle componenti* o la *matrice rappresentativa* del tensore dato, e la indicheremo anche con $[\tilde{\mathbf{T}}]$. *Scelti un riferimento e una matrice quadrata d'ordine n , esiste uno e un solo tensore la cui matrice rappresentativa nel riferimento scelto è la matrice assegnata.*

Il *prodotto* di un tensore per un numero reale k , e la *somma* di due tensori sono definiti dalle relazioni

$$\mathbf{y} = (k\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x} = k(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}})\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

Il *prodotto* $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}$ (togliendo il punto dalla scrittura $\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}$, per semplificare) è definito per composizione successiva così:

$$\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}})\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

È immediato vedere che *la matrice rappresentativa di una somma, o di un prodotto, di tensori è uguale alla somma, od al prodotto rispettivamente, delle matrici rappresentative dei tensori.*

*L'usuale precisazione relativa all'indice corrente, $i = 1, 2, \dots, n$ in questo caso, sarà in genere sottintesa.

Se ora consideriamo una “catena” di prodotti consecutivi, ad esempio $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{C}}$, per definizione tale che $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}[\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x})]$, poiché $[\tilde{\mathbf{P}}] = [\tilde{\mathbf{A}}][\tilde{\mathbf{B}}][\tilde{\mathbf{C}}] = ([\tilde{\mathbf{A}}][\tilde{\mathbf{B}}])[\tilde{\mathbf{C}}]$ (il prodotto fra matrici è associativo), abbiamo che *il prodotto tensoriale è associativo, in modo che possiamo scrivere semplicemente che*

$$\tilde{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{C}}) = (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}})\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{C}}.$$

Per definizione, il **trasposto** $\tilde{\mathbf{A}}^T$ di un tensore $\tilde{\mathbf{A}}$ è tale che

$$\mathbf{y} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}.$$

Poiché $\mathbf{y} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot [(\tilde{\mathbf{A}}^T)^T]\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, abbiamo che $(\tilde{\mathbf{A}}^T)^T = \tilde{\mathbf{A}}$.

Con l'uso delle matrici rappresentative, verificato che $[\tilde{\mathbf{A}}]^T = [\tilde{\mathbf{A}}^T]$, possiamo poi controllare che

$$(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}})^T = \tilde{\mathbf{B}}^T\tilde{\mathbf{A}}^T.$$

Un tensore $\tilde{\mathbf{S}}$ è detto **simmetrico** se $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{S}}^T$, mentre $\tilde{\mathbf{A}}$ è **antisimmetrico** se $\tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{A}}^T$.

Un tensore è decomponibile in modo unico nella somma di un tensore simmetrico ed uno antisimmetrico.

Infatti, la decomposizione $\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}}^T) + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{C}}^T)$ realizza la tesi ed è unica.

Definiamo ora “l'azione” di $\tilde{\mathbf{A}}$ sul vettore \mathbf{x} posto alla sua sinistra, cioè il *prodotto* $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}$, nel modo seguente:

$$\mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{x}. \quad (\text{i})$$

Ciò fatto, con l'uso delle matrici rappresentative è immediato verificare l'associatività della “catena” $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}$, cioè

$$\mathbf{x} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}, \quad \text{semplicemente.}$$

Per le associatività trovate e la commutatività del prodotto scalare, risulta che

$$(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}) \cdot (\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y}) = \mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y} = \mathbf{y}\tilde{\mathbf{B}}^T\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}. \quad (1.6)$$

1.3 Tensori ortogonali. Diadi

Un tensore $\tilde{\mathbf{A}}$ è detto *invertibile* se $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_1 \neq \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_2$. In tal caso, poiché il vettore nullo è l'unico “punto unito” della trasformazione $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$, passando ad una relazione fra matrici $y_i = A_{ij}x_j$, la matrice $[A_{ij}]$ risulta non degenerare, quindi può essere invertita. Allora, poiché $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{V} \exists! \mathbf{x} \in \mathcal{V} : \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$, risulta definito il tensore $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$, **inverso** di $\tilde{\mathbf{A}}$, tale che $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x}$, per cui $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{I}}$.

Dal procedimento seguito risulta che $[\tilde{\mathbf{A}}^{-1}] = [\tilde{\mathbf{A}}]^{-1}$, quindi anche $(\tilde{\mathbf{A}}^{-1})^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$.

Con l'uso delle matrici rappresentative, vediamo subito che se $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ sono invertibili anche $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}$ lo è, e risulta che

$$(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}})^{-1} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}.$$

Un tensore $\tilde{\mathbf{Q}}$ è detto **ortogonale** se “conserva il modulo dei vettori”, ovvero se $(\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^2, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

- 1) *Un tensore ortogonale è invertibile ed il suo inverso è anch'esso ortogonale.*
- 2) *Un tensore ortogonale conserva il prodotto scalare fra vettori.*

La prima tesi è quasi immediata. Se $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, allora $\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{a} \neq \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{b}$, altrimenti risulterebbe che $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, ed il modulo di $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ non sarebbe conservato. Per dimostrare la seconda tesi basta scrivere che

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = [\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})]^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{a}\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{a} + \mathbf{a}\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{b} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{a} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{b} = (\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{a})^2 + 2(\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{a}) \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{b}) + (\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{b})^2, \end{aligned}$$

e semplificare.

Quindi $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{x}) \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}})\mathbf{y}$, per cui

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{I}}, \quad (1.7)$$

perciò

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} = \tilde{\mathbf{Q}}^T, \quad (1.7')$$

allora anche $\tilde{\mathbf{Q}}^T$ è ortogonale, quindi

$$\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{Q}}^T = \tilde{\mathbf{I}}. \quad (1.7'')$$

Ciascuna delle proprietà (1.7), (1.7'), (1.7'') caratterizza un tensore ortogonale.

Dalla relazioni trovate segue che $[\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}] = [\tilde{\mathbf{Q}}]^{-1} = [\tilde{\mathbf{Q}}^T] = [\tilde{\mathbf{Q}}]^T$, cioè: *ogni matrice rappresentativa di un tensore ortogonale è una matrice ortogonale.* •

Dati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , il **prodotto tensoriale** $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ fra questi, o **diade**, è il tensore $\tilde{\mathbf{D}}$ definito così:

$$\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{x} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

Con il criterio di uguaglianza, è semplice verificare che

$$\begin{cases} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \Rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}, \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}), \\ \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b}\tilde{\mathbf{M}}). \end{cases}$$

Se $\mathbf{n}^2 = 1$, il tensore $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ è il **tensore di proiezione** di un vettore \mathbf{x} nella direzione del versore \mathbf{n} , cioè $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{x} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}$ dà il componente di \mathbf{x} nella direzione di \mathbf{n} .

1.4 Proprietà delle matrici rappresentative

Scelto ora un riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$ di \mathcal{V} , consideriamo innanzitutto il tensore $\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i$. Poiché $(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i)\mathbf{x} = (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{x})\mathbf{c}_i = x_i\mathbf{c}_i = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$, è allora

$$\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i = \tilde{\mathbf{I}}, \quad (1.8)$$

una relazione che è detta “di completezza”, perché esprime il fatto che l'insieme $\{\mathbf{c}_i\}$ di vettori è un insieme completo di \mathcal{V} .

Sia ora $[A_{\ell m}] = [\tilde{\mathbf{A}}]$ la matrice delle componenti di $\tilde{\mathbf{A}}$ nella base scelta. Applicando il criterio di uguaglianza, risulta che

$$\tilde{\mathbf{A}} = A_{\ell m} \mathbf{c}_\ell \otimes \mathbf{c}_m , \quad (1.9)$$

che porta ad affermare che *ogni tensore è sempre una combinazione lineare di diadi.*

Per la (1.9),

$$A_{\ell m} = \mathbf{c}_\ell \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{c}_m , \quad (1.10)$$

ed in particolare

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\ell m} = a_\ell b_m .$$

La (1.10), scritta nella forma

$$A_{\ell m} = (\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{c}_m) \cdot \mathbf{c}_\ell , \quad (1.10')$$

conduce alla osservazione seguente: *una componente $A_{\ell m}$ della matrice delle componenti $[\tilde{\mathbf{A}}]$ di $\tilde{\mathbf{A}}$ è un numero, risultato di una doppia “proiezione” di $\tilde{\mathbf{A}}$ effettuata, in ordine inverso a quello degli indici, una prima volta “su” \mathbf{c}_m , ed il risultato (che è un vettore) “su” \mathbf{c}_ℓ .*

Da questa osservazione segue la proprietà, spesso utile, che *se invertiamo il verso di uno dei versori della base (il verso di uno degli assi in un riferimento cartesiano), una componente di un tensore cambia tante volte di segno, quante volte l'indice di quel versore (di quell'asse) compare nella lista degli indici di quella componente.*

Se ora conveniamo che la “matrice rappresentativa di un vettore” \mathbf{v} sia indifferentemente la matrice ad una sola riga formata dalle componenti del vettore, $[\cdots v_m \cdots]$, oppure la sua trasposta, anzi identifichiamo queste due rappresentazioni per tenere conto anche della definizione (i) a pag.4, allora: *tutte le relazioni finora scritte fra vettori e tensori (e tutte quelle che seguiranno) si trasformano immediatamente in analoghe relazioni fra le matrici rappresentative, pur di scegliere per matrice rappresentativa di un vettore la “matrice colonna”, se in un prodotto il vettore sta a destra del prodotto scalare (il “ \cdot ” in genere sottinteso) oppure a sinistra del prodotto tensoriale, \otimes , la “matrice riga” nei casi opposti.*

Sia ora $\{\mathbf{c}'_\ell\}$ una seconda base ortonormale, che possiamo scrivere nella forma

$$\mathbf{c}'_\ell = \alpha_{\ell m} \mathbf{c}_m .$$

La matrice dei *coseni direttori* $\alpha_{\ell m} = \mathbf{c}'_\ell \cdot \mathbf{c}_m$ è una matrice ortogonale. Infatti:

$$\delta_{\ell m} = \mathbf{c}'_\ell \cdot \mathbf{c}'_m = (\alpha_{\ell r} \mathbf{c}_r) \cdot (\alpha_{ms} \mathbf{c}_s) = \alpha_{\ell r} \alpha_{ms} \mathbf{c}_r \cdot \mathbf{c}_s = \alpha_{\ell r} \alpha_{ms} \delta_{rs} = \alpha_{\ell s} \alpha_{ms} ,$$

risultato che caratterizza le matrici ortogonali.

La prima base è trasformata nella seconda con l'applicazione del tensore

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{c}'_i \otimes \mathbf{c}_i ,$$

che è proprio tale, per costruzione, che

$$\mathbf{c}'_i = \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{c}_i ,$$

ed è un tensore ortogonale. Infatti:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{c}_r \otimes \mathbf{c}'_r) (\mathbf{c}'_s \otimes \mathbf{c}_s) = (\mathbf{c}'_r \cdot \mathbf{c}'_s) \mathbf{c}_r \otimes \mathbf{c}_s = \delta_{rs} \mathbf{c}_r \otimes \mathbf{c}_s = \tilde{\mathbf{I}} .$$

Poiché

$$\mathbf{c}_\ell \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{c}_m = \mathbf{c}_\ell (\mathbf{c}'_r \otimes \mathbf{c}_r) \mathbf{c}_m = (\mathbf{c}_\ell \cdot \mathbf{c}'_r) (\mathbf{c}_r \cdot \mathbf{c}_m) = \alpha_{r\ell} \delta_{rm} = \alpha_{m\ell},$$

così come

$$\mathbf{c}'_\ell \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{c}'_m = \alpha_{m\ell},$$

indicate con $[\tilde{\mathbf{Q}}]$ e $[\tilde{\mathbf{Q}}]'$ le rappresentative di $\tilde{\mathbf{Q}}$ sulle basi $\{\mathbf{c}_\ell\}$ e $\{\mathbf{c}'_\ell\}$ rispettivamente, concludiamo che

$$[\tilde{\mathbf{Q}}] = [\tilde{\mathbf{Q}}]' = [\alpha]^T, \quad \text{con } [\alpha] = [\alpha_{\ell m}]. \quad (1.11)$$

Siano ora $A'_{ij}, A_{\ell s}$ elementi della matrice rappresentativa di un tensore $\tilde{\mathbf{A}}$ sulle basi $\{\mathbf{c}'_r\}$ e $\{\mathbf{c}_r\}$ rispettivamente. Risulta che

$$A'_{ij} = \mathbf{c}'_i \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{c}'_j = (\alpha_{i\ell} \mathbf{c}_\ell) \tilde{\mathbf{A}} (\alpha_{js} \mathbf{c}_s) = \alpha_{i\ell} \alpha_{js} \mathbf{c}_\ell \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{c}_s = \alpha_{i\ell} \alpha_{js} A_{\ell s}. \quad (1.12)$$

Il risultato, scritto nella forma,

$$[A'_{ij}] = [\alpha][A_{\ell s}][\alpha]^T, \quad (1.12')$$

mostra che *nel passaggio da un riferimento ad un altro la matrice rappresentativa d'un tensore cambia secondo una trasformazione ortogonale.*

Anche per un vettore \mathbf{v} abbiamo un enunciato analogo, una volta scritto il risultato familiare

$$v'_i = \mathbf{c}'_i \cdot \mathbf{v} = (\alpha_{ir} \mathbf{c}_r) \cdot \mathbf{v} = \alpha_{ir} \mathbf{c}_r \cdot \mathbf{v} = \alpha_{ir} v_r,$$

nella forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ v'_i \\ \vdots \end{bmatrix} = [\alpha] \begin{bmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Poiché la traccia ed il determinante di una matrice sono invarianti in una trasformazione ortogonale, diremo *traccia* $\text{tr} \tilde{\mathbf{A}}$ e *determinante* $\|\tilde{\mathbf{A}}\|$ di $\tilde{\mathbf{A}}$ quelli di una sua qualunque matrice rappresentativa, $\text{tr} \tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}[\tilde{\mathbf{A}}] = A_{ii}$ e $\|\tilde{\mathbf{A}}\| \stackrel{\text{def}}{=} \|[\tilde{\mathbf{A}}]\|$.

Se $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ sono due tensori del secondo ordine, la $\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}})$ sarà in genere indicata con $\tilde{\mathbf{A}}:\tilde{\mathbf{B}}$. In termini di rappresentative risulta che $\tilde{\mathbf{A}}:\tilde{\mathbf{B}} = \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}) = A_{ij}B_{ji}$.

Principalmente a titolo d'esempio, notiamo che $\text{tr} \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{1}}:\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}:\tilde{\mathbf{1}}$.

1.5 Autovalori e derivata di un tensore

La definizione di **autovalore** e **autovettore** di un tensore viene fatta in modo analogo a quello seguito per le matrici, e si traduce immediatamente nell'analoga condizione per la matrice rappresentativa del tensore.

Un numero α , anche nullo, è autovalore **destro** di $\tilde{\mathbf{A}}$ se esiste un vettore \mathbf{x} *non nullo* tale che $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$, nel qual caso \mathbf{x} è detto autovettore **destro** di $\tilde{\mathbf{A}}$. La definizione può essere considerata "a sinistra" di $\tilde{\mathbf{A}}$, scrivendo stavolta che sia $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}} = \beta\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \neq 0$, condizione che definisce gli autovalori e gli autovettori **sinistri** del tensore. Per un tensore simmetrico, la cui matrice rappresentativa è simmetrica, gli autovalori ed autovettori esistono sempre, e quelli destri coincidono con quelli sinistri.

Sia ora $\tilde{\mathbf{S}}$ un tensore simmetrico: la sua matrice rappresentativa $[\tilde{\mathbf{S}}]$ in una base $\{\mathbf{c}_i\}$ è simmetrica. Sia $[\beta] = [\beta_{ij}]$ una matrice ortogonale tale che la trasformata ortogonale $[\beta][\tilde{\mathbf{S}}][\beta]^T$ sia diagonale. Questa matrice diagonale, nella cui diagonale

ogni autovalore λ_i di $[\tilde{\mathbf{S}}]$ compare tante volte quant'è il proprio grado di molteplicità, è la matrice rappresentativa di $\tilde{\mathbf{S}}$ nel riferimento di versori $\mathbf{n}_i = \beta_{ij}\mathbf{c}_j$. Possiamo quindi affermare che

$$\tilde{\mathbf{S}} = \sum_1^n \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i. \quad (1.13)$$

Le direzioni degli autovettori \mathbf{n}_i sono dette *autodirezioni* del tensore.

Il tensore simmetrico $\tilde{\mathbf{S}}$ è detto *definito positivo* se $\forall \mathbf{x} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{x} > 0$, *semidefinito positivo* se $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{x} \geq 0$. Per la (1.13), $\tilde{\mathbf{S}}$ è definito positivo se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi, semidefinito positivo se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi o nulli. Non ci interesseranno nel seguito gli altri due casi possibili per $\tilde{\mathbf{S}}$, il caso *(semi)definito negativo*, $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{x} (\leq) < 0$, e quello *indefinito*, $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{x}$ di segno qualunque, corrispondenti ad analoghe proprietà della segnatura degli autovalori λ_i del tensore. •

Possiamo dire che un tensore $\tilde{\mathbf{A}}$ è una funzione “sufficientemente regolare” di una variabile t , se tale risulta ogni elemento $A_{ij}(t)$ di una sua matrice rappresentativa. Se tutti questi elementi sono derivabili, possiamo definire la *derivata* $\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{A}}$, di $\tilde{\mathbf{A}}$ rispetto a t , nel modo seguente:

$$\left[\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d[\tilde{\mathbf{A}}]}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{dA_{ij}}{dt} \right].$$

Queste definizioni sono lecite perché, per la (1.12), la loro validità ed i risultati non dipendono dalla base scelta.

Abbiamo già osservato che la matrice rappresentativa d'una espressione formata da vettori e tensori, legati dalle operazioni di composizione di prodotto scalare e tensoriale, come $\mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\tilde{\mathbf{B}} (= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{a} \otimes \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{b})$, etc., è uguale al prodotto nell'ordine delle matrici rappresentative dei vari termini dell'espressione. Ma in un prodotto fra matrici continua a valere la regola formale di derivazione di un prodotto. Possiamo quindi concludere che: *la denominazione “prodotto”, usata per le operazioni di composizione fra vettori e tensori finora considerate, risulta pienamente giustificata dalla conservazione della regola formale di derivazione del prodotto tra funzioni.*

Giunti alla fine di questa breve esposizione generale, dobbiamo rilevare però che la definizione adottata del concetto di tensore, pur formalmente ineccepibile, può essere sostanzialmente fuorviante sul significato di tale concetto. In genere, nelle applicazioni, un tensore viene introdotto non come un'applicazione lineare, ma come un'entità geometrica, meccanica, fisica in generale, rappresentata in ogni sistema di assi cartesiani da una matrice che cambia secondo la trasformazione ortogonale indicate nel passaggio da un riferimento all'altro. *In virtù di tale legge di trasformazione a questa matrice, quindi all'entità, può essere associata un'applicazione lineare che diventa il modello matematico dell'entità, soprattutto nell'utile forme sintetica (1.9).*

1.6 I campi ed i moti rigidi

Dato un sistema di punti mobili, premettiamo che per **atto di moto** del sistema ad un certo istante si intende il campo delle velocità dei punti in quell'istante.

Un sistema di punti mobili è detto **rigido** o un **corpo rigido** quando si muove sempre in modo tale che i vari punti mobili mantengono inalterate nel tempo le loro reciproche distanze. Ci occuperemo sempre di sistemi rigidi tridimensionali, cioè formati da almeno quattro punti non giacenti in un piano; anzi, rileviamo allora che è utile, al fine di semplificare i ragionamenti, pensare che l'“estensione” del corpo rigido sia indeterminata, per così dire, oppure che sia “ampliabile” a piacere, in modo da potervi includere tutti i successivi punti di interesse che via via si presentano.

Se O e P sono due punti d'un corpo rigido, \mathbf{v}_O e \mathbf{v}_P le loro velocità, e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo, ricordiamo la relazione

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge OP \quad (1.14)$$

che è detta **formula caratteristica dei moti rigidi**, perché se è verificata, le distanze fra i punti rimangono invariabili nel tempo. Infatti, dalla (1.14) segue che $0 = (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_O) \cdot OP = \frac{d}{dt}(OP)^2$, ovvero $(OP)^2$ è costante nel tempo.

In un atto di moto rigido di un corpo, il campo di velocità dei punti del corpo è dato dalla (1.14). Convien estendere la definizione della (1.14) a tutto lo spazio, dicendo che un **moto rigido** (in un certo intervallo di tempo) è un campo di velocità definito in tutto lo spazio che gode della proprietà (1.14). Un moto rigido è assegnato se vengono assegnate come funzioni (sufficientemente regolari) del tempo, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ e quella $\mathbf{v}(t)$ di un punto O . Una determinazione di un moto rigido ad un certo istante è quindi un *atto di moto rigido*.

Rileviamo esplicitamente che le due nozioni di “moto d'un corpo rigido” e “moto rigido” sono intese diverse, anche se collegate, e se l'una può essere usata al posto dell'altra, perché il moto d'un corpo rigido determina univocamente un moto rigido.

Dalla (1.14) seguono alcune semplici ma notevoli proprietà di un atto di moto rigido, proprietà comuni ad altri campi vettoriali che soddisfano alla stessa relazione. Per mettere in evidenza queste proprietà, diremo **campo (vettoriale) rigido** ogni campo vettoriale definito in tutto lo spazio, $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}(P)$, tale che esiste un vettore \mathbf{a} , che chiameremo *vettore del campo* per cui

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{a} \wedge OP, \quad \forall O \text{ e } P.$$

Un altro esempio di campo rigido è quello dei momenti rispetto a un punto di un sistema di vettori applicati, esempio che vedremo nel prossimo paragrafo.

Lemma. *Sia dato un campo vettoriale rigido non costante*

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{a} \wedge OP, \quad \mathbf{a} \neq 0, \quad (i)$$

allora:

1) *il valore del campo su tutti i punti di ogni retta parallela a \mathbf{a} è costante;*

- 2) *il componente del campo nella direzione di \mathbf{a} è costante;*
 3) *esiste una retta parallela a \mathbf{a} , tale che in ogni punto di questa il componente del campo normale alla direzione di \mathbf{a} è nullo, quindi in tali punti il modulo del campo ha valore minimo.*

La prova della proprietà 1) è immediata. Per la proprietà 2), sia \mathbf{u} il versore di \mathbf{a} , in modo che $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ è il proiettore nella direzione di \mathbf{a} . Dalla (i) abbiamo che $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{x}_P = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{x}_O + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{O}P)$, ovvero

$$(\mathbf{x}_P \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = (\mathbf{x}_O \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}.$$

Per dimostrare la proprietà 3), consideriamo il componente $\mathbf{x}_{\perp P}$ normale a \mathbf{a} del campo, $\mathbf{x}_{\perp P} = \mathbf{x}_P - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{x}_P$; dalla (i) otteniamo che $\mathbf{x}_{\perp P} = \mathbf{x}_{\perp O} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{O}P$. Prendiamo un piano π normale a \mathbf{a} : esiste su π un punto P^* (unico) tale che $\mathbf{x}_{\perp P^*} = 0$. Sia $P \in \pi$, se $\mathbf{x}_{\perp P} = 0$, P è il punto P^* della tesi. In caso contrario, consideriamo i punti della retta r di π passante per P e perpendicolare a $\mathbf{x}_{\perp P}$. Se P' è uno di questi $\mathbf{a} \wedge P'P$ è parallelo a $\mathbf{x}_{\perp P}$, per cui sulla retta r esiste un solo punto P^* tale che $0 = \mathbf{x}_{\perp P} + \mathbf{a} \wedge P'P^*$. Allora $\mathbf{x}_{P^*} = \boldsymbol{\tau}$, e ciò è vero per tutti i punti della retta passante per P^* e parallela a \mathbf{a} . Il modulo del campo, il cui quadrato è uguale alla somma dei quadrati dei moduli dei componenti parallelo e normale a \mathbf{a} ha quindi valore minimo sui punti di r .

La retta r sarà detta l'**asse** del campo rigido. Se P^* è un punto dell'asse, la (i) può essere scritta nella forma

$$\mathbf{x}_P = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{a} \wedge P^*P, \quad \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{a} = 0, \quad (\text{ii})$$

che rimane valida anche per $\boldsymbol{\tau} = 0$.

Nel caso di un atto di moto rigido l'asse del campo viene detto **asse (istantaneo) del moto**. Se P^* è un punto di tale asse, l'atto di moto può essere scritto così

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} \wedge P^*P, \quad \text{con } \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (1.15)$$

Se ad un certo istante $\boldsymbol{\omega} = 0$, l'atto di moto è detto **traslatorio**, e un moto rigido è detto **traslatorio** se tutti i suoi atti di moto sono traslatori, cioè se la velocità angolare è sempre nulla. Un moto rigido è detto **rotatorio** attorno ad un asse, l'**asse di rotazione**, se esiste una retta i cui punti hanno sempre velocità nulla. Se nella (1.15) $\boldsymbol{\tau} = 0$, l'atto di moto è detto **rotatorio**, e l'asse del moto **asse istantaneo di rotazione**.

Un moto rigido ha *un punto fisso* O , se questo punto ha sempre velocità nulla. Per la (1.15), *ogni atto di moto di un moto rigido con un punto fisso è un atto di moto rotatorio, con l'asse istantaneo che passa per il punto fisso.*

È da rilevare che ogni atto di un moto rigido può essere rotatorio, senza che tale sia l'intero moto, perché l'asse istantaneo di rotazione può variare durante il moto. Invece un moto rigido è traslatorio se solo se tutti i suoi atti di moto sono traslatori.

Un moto rigido somma di uno rotatorio uniforme, e di uno traslatorio uniforme nella direzione dell'asse di rotazione, è detto **elicoidale**. Ciò premesso, la (1.15) può

essere efficacemente illustrata dicendo che *ogni atto di moto rigido non traslatorio è elicoidale (teorema del Mozzi).**

Un moto rigido è **piano** se esiste una giacitura di piani che rimangono uniti durante il moto, in modo che la traiettoria di ogni punto è una curva piana, e le velocità dei punti sono parallele ai piani della giacitura. Dall'esame della (1.15) deduciamo il **teorema di Eulero**: *ogni atto di moto rigido piano è o rotatorio o traslatorio.*

1.7 I sistemi equivalenti di vettori applicati

Come altro – importante – esempio di applicazione del lemma enunciato nel paragrafo precedente, consideriamo qui l'insieme di un numero N (numero che sarà in genere sottinteso) di vettori applicati $\{\mathbf{v}_\ell, P_\ell\}$, essendo P_ℓ il punto di applicazione del vettore \mathbf{v}_ℓ . Il caso più importante è quello in cui i vettori applicati sono delle forze, ed è da questo caso che traggono origine le definizioni che introdurremo.

La somma dei vettori $\mathbf{R} = \Sigma_\ell \mathbf{v}_\ell$ è detta **risultante** dei vettori, mentre, se O è un punto, il vettore $\mathbf{M}_O = \Sigma_\ell OP_\ell \wedge \mathbf{v}_\ell$ è detto il **momento (risultante)** del sistema rispetto al *polo* O .

Il campo vettoriale $\mathbf{M}(O) = \mathbf{M}_O$ è definito in tutto lo spazio ed è un campo vettoriale rigido, perché se O' è un altro punto, scritto che $OP_\ell = OO' + O'P_\ell$, è immediato ricavare la **formula di trasposizione dei momenti**

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + OO' \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{R} \wedge O'O. \quad (1.16)$$

Se $\mathbf{R} = 0$, il campo rigido è un campo costante, cioè il momento risultante è indipendente dalla scelta del polo. Il caso più semplice è quello di una **coppia** di vettori, cioè di un sistema formato da due vettori “uguali ed opposti”, \mathbf{v} applicato in P_1 e $-\mathbf{v}$ applicato in P_2 . In questo caso la distanza fra le due rette di azione dei vettori è detto il *braccio* della coppia. Considerando il momento del sistema rispetto ad uno dei due punti di applicazione, si controlla facilmente che il modulo di tale momento è uguale al prodotto dell'*intensità* dei vettori, cioè $|\mathbf{v}|$, per il braccio della coppia, e la direzione del momento è ortogonale al piano della coppia, cioè a quello che passa per i punti di applicazione P_1 e P_2 ed è parallelo a \mathbf{v} .

Ciò premesso, *due sistemi di vettori applicati si dicono equivalenti se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo (basta uno solo) qualunque.*

La ragione di questa definizione di equivalenza, formalmente lecita, risiede nel fatto che un sistema di forze agenti su un corpo rigido compare nelle equazioni di moto solo attraverso il risultante ed il momento risultante del sistema rispetto ad un polo, in modo che, nella dinamica del corpo rigido, due sistemi diversi di forze, ma con gli stessi risultante e momento risultante, sono dinamicamente equivalenti.

*I risultati esposti giustificano l'altra denominazione, usata nella letteratura, di campi vettoriali **elicoidali** dei campi vettoriali rigidi.

Se $\mathbf{R} \neq 0$, l'asse del campo dei momenti, che è parallelo a \mathbf{R} , è detto **asse centrale** del sistema di vettori applicati, ed il componente invariante del campo lungo la direzione dell'asse, è uguale al momento del sistema rispetto ad un punto di tale asse.

Dopo queste premesse, possiamo affermare che, per il lemma già ricordato:

Un sistema di vettori applicati a risultante non nullo, è equivalente al risultante applicato in un punto dell'asse centrale, più una coppia di vettori di momento diretto come l'asse centrale, ed uguale al momento del sistema rispetto ad un punto dell'asse.

Se il risultante è nullo, allora il sistema è equivalente ad una coppia di vettori di momento uguale a quello del sistema rispetto ad un polo qualunque.

Due casi sono importanti per le applicazioni. Il primo è quello di un sistema *piano* di vettori applicati: tutti i punti di applicazione giacciono in un piano, "il piano dei vettori", ed i vettori sono paralleli a questo piano. Il secondo caso è quello in cui tutti i vettori sono paralleli fra loro.

Se il risultante non è nullo, i sistemi piani di vettori applicati, e quelli di vettori paralleli, sono equivalenti al sistema formato dal loro risultante applicato in un punto dell'asse centrale. Inoltre l'asse centrale di un sistema piano giace nel piano dei vettori.

Nel caso di un sistema piano, innanzitutto l'asse centrale è parallelo al risultante, quindi anche al piano dei vettori, π : allora il momento del sistema rispetto ad un punto dell'asse è nullo. Infatti questo momento è uguale al componente lungo l'asse del momento del sistema rispetto ad un punto di π . Ma i momenti dei singoli vettori rispetto ad uno di questi punti sono ortogonali a π , allora ciò accade anche per il momento risultante, in modo che il componente di quest'ultimo lungo una direzione parallela a π risulta nullo. Inoltre l'asse giace necessariamente su π , perché se ciò non fosse, se O è un suo punto, e P un punto di π , essendo $\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + PO \wedge \mathbf{R} = PO \wedge \mathbf{R}$, \mathbf{M}_P non risulterebbe ortogonale a π .

Nel caso di un sistema di vettori paralleli, $\{\mathbf{v}_\ell = m_\ell \mathbf{g}, P_\ell\}$ con $\Sigma_\ell m_\ell \neq 0$, consideriamo il punto C tale che $\Sigma_\ell m_\ell CP_\ell = 0$: questo punto esiste ed è unico. Infatti, scelto un punto O , posto $OP_\ell = OC + CP_\ell$, imposto che $\Sigma_\ell m_\ell OP_\ell = OC \Sigma_\ell m_\ell + \Sigma_\ell m_\ell CP_\ell = OC \Sigma_\ell m_\ell$, abbiamo infine che

$$OC = \frac{\Sigma_\ell m_\ell OP_\ell}{\Sigma_\ell m_\ell}, \quad (1.17)$$

risultato che dimostra l'esistenza, e l'unicità, di C .

Allora: $\mathbf{M}_C = \Sigma_\ell CP_\ell \mathbf{v}_\ell = (\Sigma_\ell m_\ell CP_\ell) \wedge \mathbf{g} = 0$, perciò C è un punto dell'asse centrale.

Il punto C è indipendente dalla direzione di \mathbf{g} , cioè da quella dei vettori, e viene detto il **centro** del sistema di vettori paralleli: per questo punto passa l'asse centrale di ogni sistema che si ottiene da quello dato ruotando tutti i vettori secondo uno stesso tensore ortogonale.

Un caso importante è quello in cui i vettori \mathbf{v}_ℓ sono le forze peso di un sistema di particelle pesanti, quindi m_ℓ le rispettive masse e \mathbf{g} l'accelerazione di gravità. In

questo caso il centro delle forze peso è detto il **baricentro** del sistema di pesi, la sua posizione è determinata solo dalla distribuzione delle masse, e coincide con quello che viene chiamato il **centro di massa** di un sistema di masse, come ricorderemo più avanti.

Le regole di composizione di due forze, esposte nei corsi di fisica, non sono nient'altro che regole atte a determinare la posizione dell'asse centrale, come quella che afferma che *due forze parallele e concordi sono equivalenti al loro risultante applicato in un punto della congiungente i punti di applicazione delle forze, punto che divide tale congiungente in parti inversamente proporzionali all'intensità delle forze*. In questo caso il punto così determinato è proprio il centro del sistema delle due forze parallele.

Per i sistemi di vettori applicati, viene considerato anche il **momento assiale** del sistema rispetto ad una retta orientata, un "asse", così definito: se \mathbf{u} è il versore dell'orientamento e O un punto dell'asse, il momento assiale M_u è

$$M_u \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}.$$

La definizione è corretta, perché il risultato non dipende dalla scelta del polo sull'asse. Infatti, preso un altro punto P dell'asse, essendo $\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + PO \wedge \mathbf{R}$, abbiamo che $\mathbf{M}_P \cdot \mathbf{u} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u} + PO \wedge \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}$.

Nelle applicazioni, per calcolare il momento assiale di un vettore, può essere utile avere presente quanto segue. *Il risultato dipende linearmente dal vettore, è nullo se l'asse e la retta d'azione del vettore sono complanari (incidenti o paralleli). Quindi, decomposto il vettore in due termini, uno complanare con l'asse e l'altro ortogonale, basta calcolare il momento assiale del componente ortogonale, momento che risulta uguale, a parte il segno, al prodotto del modulo di tale componente per la distanza fra la sua retta d'azione e l'asse. Scelto poi un verso di rotazione attorno all'asse come verso positivo, il segno del momento è positivo se il vettore, "la forza", "tira a far girare nel verso positivo", negativo nel caso opposto.* •

Terminiamo con un'avvertenza, valida sia per le proprietà qui esposte, che in altri casi che incontreremo più avanti. I sistemi di vettori considerati finora sono sistemi *discreti*, cioè costituiti da un numero finito di vettori. È però frequente, anzi la norma, considerare *distribuzioni continue* di vettori applicati, cioè vettori che sono una funzione sufficientemente regolare del loro punto di applicazione, punto che varia su una linea, una superficie o un volume (un dominio). Allora, *quando una proposizione è vera sia nel caso discreto che in quello continuo, quando la transizione dal discreto al continuo può effettuarsi semplicemente sostituendo nelle ipotesi, negli sviluppi e nelle tesi, le somme del caso discreto con gli integrali corrispondenti nel caso continuo, ottenendo così delle relazioni sempre corrette, per brevità è consuetudine esporre solo nel caso discreto i passaggi che portano dalle ipotesi alle tesi*.

1.8 Le equazioni della dinamica

L'interazione, descritta da una forza \mathbf{F} , dell'esterno su una particella dipende in generale anche dal moto di quest'ultima. Il primo caso da prendere in considerazione è quello di un punto materiale di massa m , libero di assumere qualunque posizione nello spazio, su cui agisce una forza totale conosciuta rispetto all'osservatore attuale, inerziale o meno, in funzione della posizione, P , del punto, della sua velocità, \mathbf{v} , e del tempo: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t)$. La dipendenza della forza dal tempo e dagli elementi del moto del punto espressamente indicati, copre la generalità dei casi interessanti la meccanica. Inoltre, per i motivi analitici che seguiranno, supporremo che tale dipendenza sia almeno continua nel tempo, e generalmente di classe C^1 nella posizione, tranne qualche posizione "singolare" al più, e nella velocità della particella, come nel caso d'un punto attratto da un centro fisso, con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza (del punto dal centro), che è un esempio di forza definita ovunque salvo il centro d'attrazione, che è una posizione singolare. Però, *va tenuto presente che in casi d'interesse pratico, ad esempio in presenza di forze d'attrito, tale regolarità può mancare in corrispondenza del valore nullo della velocità.*

Pertanto, durante il moto del punto, è

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t). \quad (1.18)$$

Caratterizzato l'osservatore con una terna di riferimento di assi x, y, z , l'equazione vettoriale (1.18) dà luogo alle tre equazioni scalari

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \end{cases} \quad (1.19)$$

alle quali deve soddisfare ogni moto $P(t) \equiv \{x(t), y(t), z(t)\}$, descritto dalla particella sotto l'azione della forza assegnata.

Le (1.19) formano un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine nelle tre incognite $x(t), y(t), z(t)$, quindi un sistema differenziale del sesto ordine. Le condizioni di regolarità dichiarate assicurano, per il teorema di Cauchy sull'esistenza e l'unicità della soluzione (almeno in piccolo) d'un sistema differenziale, che

esiste uno ed un solo moto, durante il quale, ad un istante prefissato, la particella assume una posizione ed una velocità assegnate, dette le condizioni iniziali del moto in quell'istante.

Ogni funzione $f(P, \mathbf{v}, t)$, generalmente sufficientemente regolare, costante su ogni moto della particella, cioè tale che $f[P(t), \mathbf{v}(t), t]$ è costante al variare di t quando $P(t)$ è una soluzione del sistema differenziale (1.19), è detta un **integrale primo** di tale sistema o del moto, oppure una *costante del moto*, facendo riferimento al valore della funzione su un moto del sistema. Questa proprietà della funzione viene generalmente espressa con la scrittura $f(P, \mathbf{v}, t) = \text{cost.}$.

Gli integrali primi del sistema differenziale (1.19) esistono sempre e sono infiniti, dato che una funzione arbitraria di integrali primi è ancora un integrale primo. Si

dice che m integrali primi f_k sono *indipendenti* se, scelti ad arbitrio i loro valori, nei rispettivi campi di variabilità, esiste sempre una soluzione del sistema, sulla quale gli integrali dati assumono i valori scelti. Il numero massimo di integrali indipendenti fra loro (sempre uguale all'ordine del sistema differenziale) è 6, e quando tale numero è raggiunto, esiste una sola soluzione sulla quale gli integrali dati assumono i valori assegnati, ed ogni altro integrale primo è allora esprimibile come una funzione di questi integrali indipendenti. Infatti, l'assegnazione dei valori di questi integrali caratterizza una ed una sola soluzione, quindi determina univocamente il valore d'ogni altro integrale primo, che risulta perciò una funzione di tali integrali indipendenti.

Pertanto sia ora $m \leq 6$. Indicate le coordinate del punto con x_1, x_2, x_3 , quindi le componenti della velocità con $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$, e costruita la *matrice jacobiana* a m righe e 6 colonne

$$J = \left[A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mid B_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_k} \right], \quad (1.20)$$

gli m integrali primi assegnati sono indipendenti se la caratteristica della matrice jacobiana (1.20) è uguale al loro numero, cioè m . Quando ciò non accade gli integrali sono dipendenti fra loro cioè esiste una funzione di m variabili $g(u_1, u_2, \dots, u_m)$ tale che $g[f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_m(\dots)] = 0 \quad \forall x_i, \dot{x}_j, t$.

Osserviamo che se $m = 6$ ed il determinante della matrice jacobiana quadrata (4.10), detto lo *jacobiano*, è diverso da zero, quindi se il numero degli integrali primi indipendenti è uguale all'ordine del sistema differenziale, la condizione $||J|| \neq 0$, che è una condizione di inversione funzionale, consente di asserire che i valori x_i e \dot{x}_j possono essere messi in funzione dei valori scelti a priori dei sei integrali. Ma nella dipendenza funzionale inversa deve comparire anche la variabile indipendente, il tempo t in questo caso. Quindi *se il numero degli integrali primi indipendenti è uguale all'ordine del sistema differenziale, almeno uno di tali integrali dipende dal tempo (dalla variabile indipendente)*.

Com'è stato fatto intendere quà e là, la definizione di integrale primo e le proprietà sopra esposte per il sistema differenziale (1.19) di tre equazioni del secondo ordine in tre incognite, valgono in generale per i sistemi di n equazioni differenziali normali, cioè con le derivate seconde delle incognite isolate a primo membro, di n equazioni del secondo ordine in n incognite, quindi di ordine $2n$, che sono i sistemi interessanti la meccanica. Nel caso meccanico, n è il numero di *gradi di libertà* di un sistema meccanico, cioè il numero dei "parametri" necessari e sufficienti a fissare la posizione del sistema, ed in questo paragrafo prenderemo in considerazione anche i casi $n = 1$ e $n = 2$.

L'integrale dell'energia, quando esiste, è un esempio, importante, di integrale primo delle equazioni del moto, oppure semplicemente del moto. Consideriamo ora un altro esempio sufficientemente illustrativo.

Premesso che il vettore $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è detto **quantità di moto** del punto, oppure *impulso*, denominazione più adatta per la fisica, se O è un punto fisso rispetto all'osservatore attuale, dalla $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ otteniamo che

$$OP \wedge (m\mathbf{a}) = \frac{d}{dt}(OP \wedge m\mathbf{v}) = OP \wedge \mathbf{F}. \quad (1.21)$$

Se la retta d'azione della forza \mathbf{F} passa sempre per O , la forza è detta *centrale* (con centro in O), il suo momento rispetto a O è sempre nullo e il moto del punto è centrale: il **momento della quantità di moto del punto** $OP \wedge m\mathbf{v}$, detto anche *impulso angolare*, è una costante (vettoriale) del moto, “si conserva”, quindi le sue tre componenti cartesiane sono tre integrali primi delle equazioni del moto e sono indipendenti.

Infatti, fissato gli assi cartesiani x, y, z con centro in O e con orientamento circolare concorde con quello del prodotto vettore, queste tre componenti sono, nell'ordine,

$$y\dot{z} - z\dot{y}, \quad z\dot{x} - x\dot{z}, \quad x\dot{y} - y\dot{x}, \quad (\text{i})$$

a meno del fattore m , e la loro matrice jacobiana è

$$\begin{bmatrix} 0 & \dot{z} & -\dot{y} & 0 & -z & y \\ -\dot{z} & 0 & \dot{x} & z & 0 & -x \\ \dot{y} & -\dot{x} & 0 & -y & x & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{ii})$$

che ha proprio caratteristica tre, ovviamente per valori generici delle variabili.

Se la forza dipende solo dalla distanza ρ di P da O , $\mathbf{F} = \frac{OP}{\rho}(f\rho)$, è anche conservativa e la sua energia potenziale è $V(\rho) = -\int f(\rho)d\rho$. In questo caso esiste anche l'integrale primo dell'energia

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(\rho) \quad (\text{3i})$$

che risulta indipendente dagli altri tre integrali (i), come si controlla formalmente aggiungendo alla matrice (ii) la riga delle derivate parziali della (3i) rispetto a $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ e verificando che la caratteristica della matrice risultante è proprio quattro.

Se la forza è sempre nulla, abbiamo allora i tre integrali primi del moto indipendenti fra loro

$$\dot{x}, \quad \dot{y}, \quad \dot{z}, \quad (\text{4i})$$

e quello dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

che però è una funzione degli integrali (4i).

I tre integrali (4i) più gli altri tre (i) non possono essere indipendenti fra loro, perché sono indipendenti dal tempo ed in numero pari all'ordine del sistema differenziale: infatti il loro jacobiano è nullo ed essi soddisfano alla relazione $(OP \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$. Per avere un insieme “completo” di integrali primi, dobbiamo sostituire almeno uno di questi con un altro dipendente dal tempo. In questo caso è sufficiente sostituire, ad esempio, \dot{x} con $x - \dot{x}t$. •

Dopo questi opportuni richiami di carattere analitico, torniamo alla (1.18) per esporre alcune semplici, ma importanti, proprietà del moto che sono conseguenza di particolari dipendenze funzionali di \mathbf{F} dagli elementi indicati.

Innanzitutto, se la forza non dipende dal tempo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v})$, ogni posizione P_0 , se esiste, tale che $\mathbf{F}(P_0, 0) = 0$ è detta una **posizione di equilibrio** del punto. Il motivo di questa definizione è evidente: per l'unicità della soluzione, la soluzione della (1.18) corrispondente alle condizioni iniziali $P = P_0$ e $\mathbf{v} = 0$, è la soluzione costante $P(t) \equiv P_0$, cioè: *la particella messa nella posizione P_0 con velocità nulla rimane indefinitamente in quella posizione*. Osserviamo che:

1) *Se un punto è soggetto ad una forza indipendente dal tempo, sufficientemente regolare nel valore nullo della velocità, e se ha una velocità non nulla, allora il punto non potrà mai trovarsi con velocità nulla in una (eventuale) posizione d'equilibrio, cioè non potrà mai raggiungere l'equilibrio.*

Infatti, se ciò accadesse ad un certo istante, avremmo, a tale istante, due soluzioni delle equazioni del moto corrispondenti agli stessi valori iniziali.

Una proprietà di immediata verifica è che:

2) *Se la forza è indipendente dal tempo, i moti sono traslabili nel tempo,* cioè se $P(t)$ è una soluzione della (1.18), anche $P_1(t) = P(t - t_0)$ è una soluzione della stessa equazione.

Un'altra proprietà è:

3) *Se la forza è posizionale, o dipende dalla velocità solo attraverso il tensore $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})^*$, allora i moti sono reversibili nel tempo,* cioè se $P(t)$ è una soluzione della (1.18), anche $P_2(t) = P(-t)$ lo è, come si controlla subito osservando che invertendo t l'accelerazione non cambia, mentre velocità cambia di segno, ma non il tensore $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$. Il caso comune accade quando la forza dipende da tale tensore solo attraverso il quadrato della velocità, \mathbf{v}^2 .

Combinata con la precedente, quest'ultima proprietà può essere illustrata efficacemente così:

4) *Nelle ipotesi sopra dichiarate per le proprietà della forza, se durante il moto di un punto, ad un certo istante ne invertiamo la velocità, allora il punto ripercorre all'indietro la traiettoria già percorsa, impiegando, per ritornare ad una posizione precedente, lo stesso tempo impiegato per giungere da quella posizione, a quella in cui il moto era stato invertito.*

1.9 La particella vincolata

Richiamiamo in primo luogo i primi elementi della geometria differenziale delle curve, da tenere presenti perché utili nella descrizione del moto d'un punto.

Data una linea continua e rettificabile dello spazio, preso un riferimento cartesiano, posto il punto generico P della linea in funzione dell'ascissa curvilinea s , considerata cioè la rappresentazione parametrica

$$P(s) \equiv \{x(s), y(s), z(s)\}, \quad (i)$$

*Sarà sempre sottinteso, tranne eventuali avvertenze, che le forze dipendono in modo regolare, almeno di classe C^1 , dagli argomenti espressamente indicati o sottintesi

che supporremo sempre generalmente derivabile con continuità almeno due volte, è ben noto che il vettore $\frac{dP}{ds}$ è unitario e parallelo alla tangente alla curva nel punto in considerazione: in effetti tale derivata definisce il **versore tangente** alla curva,

$$\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dP}{ds}. \quad (\text{ii})$$

Dall'identità $\mathbf{t}^2(s) = 1$ segue che la derivata $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ è ortogonale a \mathbf{t} , cioè $\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$, e nei punti in cui non è nulla definisce la **normale principale** \mathbf{n} alla curva, tramite l'uguaglianza

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = c \mathbf{n}, \quad c > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1.22)$$

In ogni caso, $c = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|$ è detta la **curvatura**, e $R = \frac{1}{c}$ il **raggio di curvatura** della linea in quel punto.

Il **piano osculatore** alla linea, in un punto P in cui \mathbf{t} e \mathbf{n} sono definiti, è il piano passante per P e parallelo a \mathbf{t} e \mathbf{n} . Quindi tale piano è normale al vettore assiale unitario

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n},$$

detto* la **binormale** alla curva in quel punto.

Consideriamo ora un punto mobile $P(t)$. In ogni intervallo temporale in cui la velocità non è mai nulla, la traiettoria, che è rettificabile, è una linea dotata di tangente funzione di classe C^1 del tempo, e, ad ogni istante, la velocità è parallela alla tangente alla traiettoria, o, come si dice, “è tangente alla traiettoria”. L'ascissa curvilinea sulla linea è una funzione crescente del tempo, e può essere invertita in una funzione di classe C^1 , in modo che il versore tangente risulta una funzione della stessa classe di tale ascissa.

In ogni caso, anche se la velocità si annulla in qualche istante, la posizione del punto mobile può essere sempre posta, almeno localmente, in funzione dell'ascissa curvilinea. Supposto che tale funzione sia localmente di classe C^2 e che la normale principale \mathbf{n} sia definita, abbiamo che $\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \mathbf{t}$, e $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{s} \mathbf{t}) = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} + c \dot{s}^2 \mathbf{n} = \ddot{s} \mathbf{t} + \frac{1}{R} \dot{s}^2 \mathbf{n}$, cioè le **equazioni intrinseche** del moto:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{t}, \\ \mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Il componente $\ddot{s} \mathbf{t}$ di \mathbf{a} è detto **accelerazione tangenziale**, mentre l'altro, $\frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}$, **accelerazione normale** del punto mobile. •

Oltre l'azione di forze “attive”, quelle del tipo già considerato, una particella può risentire dell'azione d'un “corpo solido” (sufficientemente rigido) a “contatto” con la particella, che l'obbliga a restare confinata in una zona di spazio praticamente monodimensionale o bidimensionale: in tal caso la situazione viene schematizzata

*Almeno nell'usuale scelta antioraria dell'orientamento del prodotto vettore.

parlando di punto *vincolato* su una linea o una superficie rigide. Dal punto di vista della legge di Newton, o “newtoniano”, l’azione del vincolo sul punto si esplica in una forza \mathbf{R} , la *reazione vincolare* agente sul punto, tale da verificare sia la legge di Newton

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}, \quad (1.24)$$

che la condizione di appartenenza del punto al vincolo. Inoltre la reazione vincolare si differenzia dalla forza attiva in quanto può dipendere dal moto del punto anche attraverso derivate temporali della posizione di ordine superiore al primo, tipicamente solo fino all’accelerazione del punto nei casi semplici che considereremo.

Consideriamo in primo luogo un punto materiale di massa m vincolato su una linea γ fissa rispetto all’osservatore attuale, linea sufficientemente regolare in modo che su questa sia generalmente definito il triedro intrinseco $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Se s è l’ascissa curvilinea della curva, per le (1.23) abbiamo che la proiezione della (1.24) sul triedro intrinseco dà luogo alle *equazioni intrinseche del moto*

$$\begin{cases} F_t + R_t = m\ddot{s}, \\ F_n + R_n = m\frac{\dot{s}^2}{R}, \\ F_b + R_b = 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

con ovvio significato per le componenti delle forze scritte a primo membro.

Per determinare il moto occorre fare delle ipotesi sulla natura del vincolo, o sulle proprietà della reazione vincolare. L’ipotesi più semplice è che il vincolo sia *privo di attrito*, o *liscio*, cioè che la *reazione vincolare agente sul punto ad opera del vincolo sia sempre “ortogonale al vincolo”*, alla linea γ in questo caso.

Se il vincolo è liscio, poiché nelle (1.25) $R_t = 0$ e $F_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ risulta una funzione $f = f(s, \dot{s}, t)$ sufficientemente regolare, la prima di queste dà luogo all’equazione di moto

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}, t), \quad (1.26)$$

che non contiene la reazione vincolare, mentre le altre due consentono di determinare tale forza, una volta conosciuto il moto del sistema.

La (1.26) è un’equazione differenziale del secondo ordine, che verifica le ipotesi di regolarità, che assicurano la validità, per quest’equazione, dei risultati esposti a partire dalle equazioni (1.19) in poi. In particolare, *se $f = f(s, \dot{s}^2)$, allora sono vere anche le conclusioni delle proprietà (2),(3),(4) già esposte per il punto libero.*

Se la forza attiva \mathbf{F} è posizionale, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P)$, allora f dipende solo da s , $f = f(s)$. In tal caso, moltiplicando per \dot{s} i due membri dell’equazione di moto

$$m\dot{s}\ddot{s} = \dot{s}f(s), \quad (1.27)$$

ed integrando rispetto al tempo, otteniamo l’integrale primo

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s) = E = \text{cost.}, \quad (1.28)$$

che ha la forma d'un integrale dell'energia, essendo $-V(s)$ una primitiva di $f(s)$, $V(s) = -\int f(s)ds$.

Tramite una quadratura, l'integrale (1.28) consente d'ottenere il tempo che il punto impiega per andare da una posizione ad un'altra. Infatti, tenuto conto che il valore di E è determinato dalle condizioni iniziali s_0 e \dot{s}_0 , dalla (1.28) otteniamo che

$$\dot{s} = \pm \sqrt{\frac{2[E - V(s)]}{m}}, \quad (1.29)$$

in cui va scelto come segno corretto quello iniziale di \dot{s}_0 . Supposto che sia $\dot{s}_0 > 0$, il tempo t impiegato per raggiungere ogni posizione $s > s_0$, raggiungibile finché V resta minore di E , si ottiene dalla relazione precedente, separando le variabili ed integrando:

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(z)]}}. \quad (1.30)$$

Va notato che $t(s)$ è (strettamente) crescente, quindi può essere invertita, almeno in linea di principio, per ottenere s in funzione di t .

Se per s crescente a destra di s_0 , ad un certo punto si trova s_1 tale che $E = V(s_1)$, per $s = s_1$ l'integrale (1.30) può convergere oppure no. Se $V'(s_1) = -f(s_1) = 0$, quindi se s_1 è una posizione d'equilibrio, l'integrale diverge, perché il punto non può trovarsi in un tempo finito in s_1 con velocità nulla, ma solo tendervi asintoticamente per $t \rightarrow \infty$.

Se invece s_1 non è un punto d'equilibrio, l'integrale converge. Infatti, poiché $-V'(s_1) = f(s_1) < 0$, perché V è crescente in s_1 , il punto, messo con velocità nulla in questa posizione, acquisterebbe velocità verso s_0 , perché $m\dot{s} = f(s_1) < 0$, giungendo in s_0 in un tempo finito: quindi, per la reversibilità del moto, ciò accade anche per il moto da s_0 verso s_1 , ed il punto, giunto in s_1 con velocità nulla, inverte il moto ripartendo all'indietro verso s_0 .

Consideriamo ora una superficie fissa rispetto all'ossevatore attuale, data tramite una sua rappresentazione parametrica $P(q_1, q_2) \equiv \{x_i(q_1, q_2), i = 1, 2, 3\}$, dove le funzioni $x_i(q_1, q_2)$ sono sufficientemente regolari, almeno di classe C^2 . In un punto della superficie, i vettori $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$ sono tangenti alla superficie, e se sono linearmente indipendenti, il piano che li contiene è tangente alla superficie in quel punto, che è detto un "punto regolare". La condizione affinché i due vettori siano linearmente indipendenti, è che la matrice a tre righe e due colonne formata con le loro componenti,

$$\left[A_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right], \quad (1.31)$$

abbia caratteristica due. Supporremo che la rappresentazione verifichi generalmente sempre la condizione ora messa in evidenza, caratterizzando una superficie che viene detta (*generalmente*) *regolare*. È inteso che opereremo sempre nei punti regolari di una superficie.

Dato ora un punto di massa m vincolato senza attrito su una superficie fissa rispetto all'osservatore, possiamo ottenere due equazioni di moto del punto, che non contengono la reazione vincolare, moltiplicando la (1.24) per i vettori derivati da una sua rappresentazione parametrica $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$ che sono tangenti alla superficie, quindi ortogonali alla reazione vincolare:

$$\begin{cases} m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1}, \\ m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_2} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_2}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Il procedimento sopra esposto per la superficie, può essere seguito anche nel caso già considerato, del punto vincolato su una linea fissa γ , data in genere attraverso una sua rappresentazione parametrica $P = P(q)$ sufficientemente regolare, per giungere all'equazione "pura" (senza la reazione vincolare)

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q}, \quad (1.33)$$

che può sostituire, in modo in genere più conveniente, la (1.26).

Rileviamo esplicitamente che l'ipotesi che la superficie o la linea siano fisse o invariabili in forma non è essenziale per la validità delle (1.32) o (1.33), che derivano solo dalla condizione che la reazione vincolare sia sempre ortogonale alla configurazione istantanea del vincolo, la sola che lo definisce come privo d'attrito (si pensi al caso d'un punto vincolato su una superficie sferica liscia che si muove oppure si contrae o s'espande con legge assegnata). La differenza rispetto al caso "fisso" è che, nel caso d'un vincolo liscio "mobile", le equazioni parametriche del vincolo, e le loro derivate rispetto ai parametri, contengono esplicitamente il tempo.

Lo stesso procedimento può essere seguito anche per il punto libero, qualora si ritenga di mettere le sue coordinate in funzione di opportune "coordinate curvilinee" $P = P(q_1, q_2, q_3, t) \equiv \{x_i(q_1, q_2, q_3, t), i = 1, 2, 3\}$, dove l'eventuale presenza esplicita del tempo significa semplicemente che il sistema di coordinate dipende dal tempo. Le tre funzioni, generalmente regolari, $x_i(q_1, q_2, q_3, t)$ devono essere tali che i tre vettori $\frac{\partial P}{\partial q_i}$ risultino linearmente indipendenti, quindi tali che la matrice jacobiana (1.31) formata con le loro componenti, che stavolta è una matrice quadrata, non sia degenere, una condizione che supporremo sempre generalmente verificata.

Sotto queste ipotesi, possiamo scrivere le tre equazioni indipendenti in coordinate curvilinee

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.34)$$

Giunti a questo punto, dobbiamo però dire che l'uso delle (1.32),(1.33) o (1.34) rispettivamente, per impostare i problemi di dinamica del punto, non è generalmente conveniente: è invece importante una elaborazione ulteriore di queste equazioni, col formalismo lagrangiano, esposto nel corso.

Osserviamo che nei due casi che abbiamo considerato, di punto materiale vincolato senza attrito su una linea o una superficie fisse rispetto all'osservatore attuale,

poiché la reazione vincolare è normale al vincolo, mentre le velocità possibili del punto sono tangenti, *la potenza della reazione vincolare è nulla*, un caso particolare nell'enunciato generale:

Se i vincoli sono lisci e fissi, la potenza delle reazioni vincolari è sempre nulla.

1.10 La stabilità dell'equilibrio

La nozione di posizione di equilibrio, già introdotta per il punto libero, si estende ovviamente anche ad un punto vincolato su una linea, o una superficie, *fissa* rispetto all'osservatore attuale: perché ci sia equilibrio in una posizione, il vincolo deve reagire con una reazione tale da controbilanciare il valore della forza attiva-indipendente dal tempo-calcolato in quella posizione e per velocità nulla.

Una posizione di equilibrio è detta *stabile* se, parlando in termini intuitivi, il punto si muove rimanendo sempre molto vicino a quella posizione, e con velocità molto piccola, se parte da una posizione sufficientemente vicina, e con velocità abbastanza piccola. In termini precisi: *una posizione di equilibrio P_e di un punto materiale P è stabile se fissati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, esistono $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ tali che, per ogni posizione iniziale possibile P_0 , tale che $|P_0 P_e| < \varepsilon_1$ e velocità iniziale possibile \mathbf{v}_0 tale che $\mathbf{v}_0^2 < \delta_1$, è sempre, successivamente, $|P(t) P_e| < \varepsilon$ e $\mathbf{v}(t)^2 < \delta$* . Il concetto di stabilità dell'equilibrio ha quindi un carattere dinamico, ed una posizione d'equilibrio non stabile è detta *instabile*.

Se un punto materiale libero è soggetto ad una forza conservativa, ogni punto di stazionarietà dell'energia potenziale, cioè ogni posizione in cui si annullano le derivate parziali prime, è una posizione di equilibrio. Prendendo in considerazione anche caso in cui il punto sia vincolato su una linea o una superficie fisse, o vincolato da quest'ultima a rimanere da una stessa parte dello spazio (vincolo unilaterale), possiamo enunciare il

Teorema di Dirichlet. *Se un punto materiale è soggetto ad una forza conservativa, più altre forze attive o reattive a potenza nulla o forze a potenza sempre negativa, dette dissipative, ogni posizione di minimo, libero o condizionato all'appartenenza del punto al vincolo, dell'energia potenziale della forza conservativa, è una posizione di equilibrio, che è stabile se il minimo è isolato.*

Infatti, sia $V(P)$ l'energia potenziale della forza conservativa \mathbf{F} , quindi tale che $\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{P}}$, \mathbf{R} il risultante delle forze restanti, T l'energia cinetica del punto, poiché $\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = -\dot{V} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$, segue che $\frac{d}{dt}(T + V) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \leq 0$, quindi durante il moto $T + V$ non cresce nel tempo.

Se T è l'energia cinetica del punto e V l'energia potenziale della forza conservativa, tenuto allora presente che $T + V$ non cresce nel tempo, deduciamo innanzitutto se P_e è una posizione di minimo, libero o condizionato, di V , è anche una posizione di equilibrio. Infatti, osservato ora esplicitamente che l'energia potenziale $V(P)$ è definita a meno di una costante, possiamo fissarne la determinazione imponendo che sia $V(P_e) = 0$, ed esiste allora un $\sigma > 0$ tale che per ogni posizione possibile, cioè

compatibile con l'eventuale vincolo, P per cui è $|PP_e| < \sigma$ è anche $V(P) \geq 0$. Allora la particella messa in P_e con velocità nulla vi rimane, altrimenti $T + V$ sarebbe crescente nel tempo, almeno inizialmente.

Se il minimo è isolato, esiste un $\sigma > 0$ tale che per tutte le posizioni possibili P del punto distinte da P_e per cui è $|PP_e| < \sigma$ è anche $V(P) > 0$. Inoltre, se il punto è vincolato, σ sia scelto in modo che la superficie sferica di centro P_e e raggio σ intersechi la linea o la superficie. Se m è la massa della particella, fissati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, scegliamo $\varepsilon' > 0$ tale che per tutte le posizioni possibili P dell'intorno di raggio ε' e centro P_e sia $V(P) < \frac{1}{4}m\delta$. Sia ε'' il minore fra ε , ε' e σ . Se il punto è libero, sia V_m il minimo di V sulla superficie sferica di centro P_e raggio ε'' . Se il punto è vincolato, V_m sia invece il minimo di V nell'intersezione fra tale superficie sferica e la linea o la superficie rispettivamente, o lo spazio accessibile al punto nel caso di vincolo unilaterale. È $V_m < \frac{1}{4}m\delta$ e, poiché $V(P_e) = 0$, esiste $\varepsilon_1 \leq \varepsilon'' \leq \varepsilon$ tale che, per tutte le posizioni possibili P distinte da P_0 tali che $|PP_0| < \varepsilon_1$, è $V(P) < \frac{1}{4}V_m < \frac{1}{16}m\delta$. Infine, scegliamo δ_1 tale che $\frac{1}{2}m\delta_1 < \frac{1}{4}V_m$.

Il punto materiale sia ora in una posizione iniziale P_0 tale che $|P_0P_e| < \varepsilon_1$ e con velocità iniziale \mathbf{v}_0 tale che $\mathbf{v}_0^2 < \delta_1$. Durante il moto successivo $P(t)$ della particella è sempre $T + V \leq T_0 + V_0 < \frac{1}{2}V_m$, e poiché è anche $V[P(t)] > 0$, almeno finché il punto rimane all'interno dell'intorno di raggio σ , è pure $V \leq T_0 + V_0 < \frac{1}{2}V_m$ e $T \leq T_0 + V_0 < \frac{1}{2}V_m$. La prima relazione mostra che il punto materiale non può raggiungere, quindi nemmeno oltrepassare, la frontiera dell'intorno di raggio $\varepsilon'' \leq \varepsilon$, perché se ciò accadesse V assumerebbe un valore maggiore o uguale a V_m , la seconda che è sempre $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 < \frac{1}{2}V_m < \frac{1}{8}m\delta$, cioè $\mathbf{v}^2 < \frac{1}{4}\delta < \delta$.

Prima di terminare, osserviamo che:

Se un punto materiale è vincolato senza attrito su una linea o una superficie ed è soggetto ad una forza attiva indipendente dal tempo, ogni posizione ordinaria del punto sul vincolo, cioè che non sia un eventuale estremo della linea, o un punto dell'eventuale bordo della superficie, è una posizione d'equilibrio, se in questa posizione la forza, calcolata per un valore nullo della velocità, è nulla oppure è ortogonale alla linea o alla superficie rispettivamente.

La prova formale di quest'affermazione, che è manifestamente evidente, viste le proprietà della reazione vincolare, si ottiene subito facendo ricorso alle considerazioni sviluppate per la (1.27) per il punto vincolato su una linea, oppure al formalismo lagrangiano in entrambi i casi. ●

Sia ora $T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$ è l'energia cinetica d'un sistema ad un grado di libertà, in funzione della coordinata lagrangiana q ed il sistema sia conservativo, in modo che se $V(q)$ è l'energia potenziale delle forze attive vale l'integrale dell'energia

$$T + V = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + V(q) = E. \quad (i)$$

Consideriamo una posizione di equilibrio ordinaria, isolata e di minimo dell'energia potenziale, quindi d'equilibrio stabile. Con una traslazione di coordinata, possiamo sempre porre che questa posizione sia l'origine, $q = 0$; inoltre, posto anche $V(0) = 0$,

i valori dell'energia totale $E > 0$ siano infine tali che l'equazione $V(q) = E$ ha sempre due sole soluzioni, nessuna delle quali d'equilibrio, la prima, q_1 , negativa e la seconda, q_2 , positiva, soluzioni che tendono a zero per $E \rightarrow 0$. Applicando a questa situazione più generale le considerazioni sviluppate nel paragrafo precedente, per un punto materiale vincolato senza attrito su una linea fissa, risulta chiaro che sotto queste condizioni il moto del sistema percorre tutto l'intervallo chiuso da q_1 a q_2 , è periodico di periodo

$$\widehat{T} = 2 \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{a(q)}{2[E - V(q)]}} \, dq, \quad (\text{ii})$$

espressione dedotta dalla (i) per separazione di variabili e che contiene un integrale singolare negli estremi d'integrazione, ma che è convergente se tali estremi non sono posizioni d'equilibrio.

Determiniamo ora il limite del periodo \widehat{T} quando l'ampiezza $(q_2 - q_1)$ del moto tende a zero.

A tal fine posto $q_2 = b$ e $q = bz$, osservato che $E = V(b)$, consideriamo il

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_0^b \sqrt{\frac{a(q)}{2[V(b) - V(q)]}} \, dq = \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{\frac{a(bz)}{2[V(b) - V(bz)]}} \, b \, dz. \quad (\text{3i})$$

Gli integrali (3i) sono singolari nell'estremo superiore d'integrazione e sottintendono un passaggio al limite; questo passaggio al limite può essere invertito con quello esplicitamente scritto, quindi il limite (3i) è uguale a

$$\int_0^1 \left\{ \lim_{b \rightarrow 0} \sqrt{\frac{b^2 a(bz)}{2[V(b) - V(bz)]}} \right\} \, dz. \quad (\text{4i})$$

Poiché abbiamo posto $V(0) = 0$ ed è $V'(0) = 0$, perché la posizione è d'equilibrio, è allora $V(y) = \frac{1}{2}V''(0)y^2 + o(y)$, con $\lim_{y \rightarrow 0} o(y)/y^2 = 0$, e risulta che

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{2[V(b) - V(bz)]} &= \frac{b^2}{V''(0)b^2 + 2o(b) - V''(0)b^2z^2 - 2o(bz)} = \\ &= \frac{1}{V''(0)(1 - z^2) + \frac{2o(b)}{b^2} - \frac{2o(bz)}{b^2}}. \end{aligned}$$

Quindi, se $V''(0) \neq 0$,

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sqrt{\frac{b^2 a(bz)}{2[V(b) - V(bz)]}} = \sqrt{\frac{a(0)}{V''(0)} \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)}}},$$

per cui

$$\int_0^1 \left\{ \lim_{b \rightarrow 0} \sqrt{\frac{b^2 a(bz)}{2[V(b) - V(bz)]}} \right\} \, dz = \sqrt{\frac{a(0)}{V''(0)}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a(0)}{V''(0)}},$$

mentre se $V''(0)=0$ i limiti (3i) risultano uguali a $+\infty$.

Il risultato ottenuto è il contributo al limite cercato dell'intervallo di tempo impiegato dal sistema per andare da 0 alla posizione $q_2 = b$, ma poi il sistema impiega lo stesso intervallo di tempo per raggiungere nuovamente la posizione d'equilibrio, intervallo che raddoppia il risultato precedente ed il nuovo risultato è anche il contributo al limite del tempo impiegato dal sistema per andare da 0 a q_1 e ritornare nell'origine. In definitiva, il limite del periodo del moto quando l'ampiezza tende a zero è

$$\mathcal{T} = 2\pi \sqrt{\frac{a(0)}{V''(0)}}. \quad (5i)$$

Questo limite è detto il *periodo delle piccole oscillazioni* del sistema attorno alla posizione d'equilibrio stabile, quando la stabilità è riconoscibile dall'esame della derivata seconda, che deve essere positiva.

Per vedere il significato di questa denominazione, consideriamo l'equazione di moto del sistema, subito deducibile derivando la (i) rispetto al tempo ed eliminando il fattore comune \dot{q} ,

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0. \quad (6i)$$

La (5i) ha la forma $f(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$, tale che $f(0, 0, 0) = 0$, scegliendo l'origine della coordinata nella posizione di equilibrio. Se inizialmente q , \dot{q} e \ddot{q} sono molto piccoli e tali rimangono al trascorrere del tempo, come accade in un intorno sufficientemente piccolo di una posizione d'equilibrio stabile, possiamo approssimare l'equazione del moto con quella lineare che s'ottiene prendendo i termini del primo ordine attorno al punto $\mathbf{0} = \{0, 0, 0\}$ della $f(\dots)$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_{\mathbf{0}} q + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)_{\mathbf{0}} \dot{q} + \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}}\right)_{\mathbf{0}} \ddot{q} = 0, \quad (7i)$$

e nel caso della (5i) quest'approssimazione conduce all'equazione lineare

$$a(0)\ddot{q} + V''(0)q = 0, \quad (8i)$$

che è quella dei moti armonici, $q = A \cos(\omega t + \varphi)$, di pulsazione $\omega = \sqrt{V''(0)/a(0)}$ e periodo $\mathcal{T} = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{a(0)/V''(0)}$.

Il periodo delle piccole oscillazioni non dipende dalla coordinata lagrangiana usata, quindi è una proprietà della posizione di equilibrio,

perché il valore dell'integrale (ii) non varia cambiando la variabile, oppure perché non varia il rapporto $a(0)/V''(0)$, com'è facile verificare.

Il primo esempio d'applicazione delle considerazioni sviluppate è quello ben noto del *pendolo semplice*, costituito da un piccolo grave, assimilato ad un punto materiale, di massa m , sospeso mediante un filo (supposto) perfettamente flessibile, di lunghezza l , che oscilla in un piano verticale passante per il punto di sospensione. Se si trascura la resistenza dell'aria, il sistema può essere descritto come formato da un punto materiale pesante, vincolato senza attrito sopra una circonferenza fissa di raggio l posta in un piano verticale.

Allora, se φ è l'angolo fra la congiungente il punto col centro della circonferenza e la verticale passante per il centro, scelto come livello zero dell'energia potenziale del peso quello del centro della circonferenza, per il sistema vale l'integrale dell'energia

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = \text{cost.},$$

dal quale segue l'equazione di moto

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0,$$

la cui semplificazione e linearizzazione, attorno alla posizione d'equilibrio stabile $\varphi=0$,

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

ammette come soluzioni non banali solo i moti armonici di periodo $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

1.11 La legge dell'azione e reazione

C'è una proposizione, nota col nome di **principio – o legge – di azione e reazione**, quasi universalmente elencata fra i principi della dinamica del punto materiale. Riteniamo però che l'enunciato di questa proposizione, sulla cui generalità son sorti dubbi almeno almeno fin dalla seconda metà del XIX secolo, abbia ormai fatto il suo tempo, almeno nelle forme in cui viene esposto, e che il suo uso come ipotesi di partenza sia solo un modo comodo – ma scorretto perché poco aderente alla realtà – per giungere a conclusioni che sono vere, o verificate con un elevato grado di precisione, sì da poterle accettare come tali senza errore sensibile.

L'enunciato tradizionale del principio di azione e reazione, che risale a Newton, afferma che *se una particella A esercita su un'altra particella B una forza \mathbf{F}_{AB} , allora la particella B esercita sulla particella A la forza $\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}$, e queste due forze sono dirette come la congiungente AB*; in altre parole: *le “forze di scambio” fra due particelle formano una coppia di braccio nullo.*

A queste affermazioni va obiettato che lo scambio di forze fra due particelle richiede un agente mediatore dello scambio. Se l'agente di scambio non è materiale, allora è la parte di spazio fisico, con le sue proprietà, in cui si trovano le due particelle, e l'enunciato è verificato con approssimazione largamente sufficiente solo nel caso di interazioni gravitazionali, sempre presenti anche se deboli, oppure elettrostatiche. Però l'enunciato non è verificato nel caso di un generico scambio elettromagnetico fra due particelle cariche in moto: queste non interagiscono fra loro, ma ciascuna interagisce con lo spazio circostante modificandone le proprietà, e queste interazioni si propagano con velocità finita fino all'altra particella. C'è infine da aggiungere che *allo stato attuale della conoscenza scientifica, le interazioni macroscopiche, sensibili a distanza, fra due particelle sono solo elettromagnetiche e gravitazionali.*

Invece, se l'agente di scambio è un sistema materiale, l'enunciato può ritenersi verificato solo se è trascurabile, al limite nulla, l'*inerzia* del sistema materiale, rappresentata dalla derivata temporale di alcuni attributi meccanici globali, quantità

di moto e momento delle quantità di moto, dell'agente di scambio. Questi attributi meccanici vengono definiti anche per lo spazio, in quanto sede di fenomeni elettromagnetici, ed il motivo per cui le forze agenti su due particelle cariche, ad opera del campo elettromagnetico generato dal loro moto, non soddisfano alla legge dell'azione e reazione, può essere trovato nel fatto che in genere le derivate temporali di tali attributi non sono trascurabili, tranne nel caso elettrostatico, dove sono nulle: infatti in questo caso, che abbiamo già citato, la legge torna a valere.

Gli scambi finora considerati sono scambi a distanza, più o meno lunga o breve, ma in ogni caso sensibilmente diversa da zero. Però, se le due particelle sono molto vicine, tanto da poter asserire che si “toccano”, su queste agiscono due forze dovute ad un'interazione elettromagnetica complessa fra le molecole, o gli atomi, dell'una e quelle dell'altra. Queste forze sono dette “a corto raggio d'azione”, perché sono praticamente nulle, al di là d'una distanza dell'ordine di grandezza della distanza molecolare media fra le molecole che costituiscono le particelle. In questo caso, data la piccolissima distanza in gioco, l'interazione si propaga pressoché istantaneamente, l'inerzia del campo mediatore dello scambio è nulla o praticamente tale, sì che possiamo asserire che le forze che le due particelle si scambiano, tramite l'interazione a corto raggio, formano una coppia di braccio nullo.

Queste, o analoghe, considerazioni possono applicarsi al “contatto” fra una particella e la superficie di un corpo, oppure al contatto fra le superfici di due corpi. Quindi:

La legge dell'azione e reazione è valida negli scambi di contatto fra due particelle, fra una particella e la superficie d'un corpo solido o liquido, e fra due piccole porzioni di superficie che si toccano delle superfici di due corpi, solidi o liquidi non miscibili.

In altre parole:

Solo localmente il principio di azione e reazione è sempre vero.

Nel prossimo paragrafo ripercorreremo la via usuale per giungere alle equazioni cardinali della dinamica dei sistemi estesi, ma con maggior cautela, dopo le considerazioni esposte, e tenendo altresì conto della “fisica delle cose”.

1.12 Le equazioni cardinali

Consideriamo un sistema formato da un numero molto grande di particelle, “compattate” in una zona di spazio non molto ampia. Supponiamo che le forze a corto raggio d'azione di scambio fra due particelle, non dipendano dalla presenza di altre particelle nelle immediate vicinanze. L'ipotesi fatta non risulterà limitativa ai fini della tesi finale da raggiungere, ma ci consente subito d'asserire che l'insieme delle forze di scambio fra tutte le particelle, risultando “l'unione” d'un insieme di coppie di braccio nullo, dovute all'interazione a corto raggio, è un insieme *equilibrato*, cioè a risultante e momento risultante nulli. Possiamo prendere in considerazione anche l'interazione gravitazionale fra le particelle, interazione che dà luogo ad un secondo sistema equilibrato di forze di scambio. Infine potremmo anche considerare il caso che le particelle siano cariche e tener conto dell'interazione elettromagnetica

fra queste cariche, facendo l'ipotesi che sia solo di tipo elettrostatico, in modo da avere un terzo sistema equilibrato di forze di scambio agenti.

Sia ora $\mathbf{F}_k^{(e)}$ la **forza esterna** agente sulla particella P_k , dovuta ad un'interazione elettromagnetica o gravitazionale esterna, $\mathbf{F}_k^{(i)}$ il risultante delle forze su P_k che derivano dagli scambi sopra considerati, e che è detto la **forza interna** agente su P_k , di modo che la somma $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)}$ è la forza totale agente sulla particella in considerazione: per quanto è stato detto l'insieme delle forze interne $\{\mathbf{F}_k^{(i)}, P_k\}$ è equilibrato.

Dall'equazione $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)} = m_k \mathbf{a}_k$, relativa alla generica particella P_k , sommando su tutte le particelle e tenendo conto che $\sum_k \mathbf{F}_k^{(i)} = 0$, abbiamo che

$$\sum_k \mathbf{F}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)} = \sum_k m_k \mathbf{a}_k.$$

Se \mathbf{v}_k è la velocità della particella P_k , introdotta la **quantità di moto** del sistema $\mathbf{Q} = \sum_k m_k \mathbf{v}_k$ ed il **risultante delle forze esterne** agenti $\mathbf{R}^{(e)} = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)} = \sum_k \mathbf{F}_k$, possiamo allora scrivere la relazione

$$\mathbf{R}^{(e)} = \dot{\mathbf{Q}}, \quad (1.35)$$

detta **prima equazione cardinale**.

Se O è un punto generalmente mobile e \mathbf{v}_O la sua velocità, per ogni k è

$$OP_k \wedge \mathbf{F}_k = OP_k \wedge \mathbf{F}_k^{(e)} + OP_k \wedge \mathbf{F}_k^{(i)} = OP_k \wedge m_k \mathbf{a}_k = \frac{d}{dt}(OP_k \wedge m_k \mathbf{v}_k) + \mathbf{v}_O \wedge m_k \mathbf{v}_k.$$

Sommando questo risultato su tutte le particelle, introducendo il momento rispetto a O del sistema di vettori applicati $\{m_k \mathbf{v}_k, P_k\}$, $\mathbf{K}_O = \sum_k OP_k \wedge m_k \mathbf{v}_k$, detto il **momento delle quantità di moto** rispetto a O del sistema di particelle, tenendo conto che il momento totale delle forze interne è nullo, $\sum_k OP_k \wedge \mathbf{F}_k^{(i)} = 0$, considerando anche il momento delle forze esterne $\mathbf{M}_O^{(e)} = \sum_k OP_k \wedge \mathbf{F}_k^{(e)}$, giungiamo infine alla relazione

$$\mathbf{M}_O^{(e)} = \dot{\mathbf{K}}_O + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q}, \quad (1.36)$$

detta **seconda equazione cardinale**.

Considerata ora l'**energia cinetica del sistema** $T = \sum_k T_k = \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2$, la **potenza totale** delle forze $W = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k$, quella delle sole forze esterne $W^{(e)} = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)} \cdot \mathbf{v}_k$ e l'altra di quelle interne $W^{(i)} = \sum_k \mathbf{F}_k^{(i)} \cdot \mathbf{v}_k$, scritto il teorema delle forze vive per una particella e sommato poi su tutte, abbiamo il teorema delle forze vive per il sistema considerato

$$W = W^{(e)} + W^{(i)} = \dot{T}. \quad (1.37)$$

Il sistema di particelle che abbiamo considerato è servito per giungere alle equazioni globali (1.35), (1.36) e (1.37). Però questo sistema non è ancora una buona immagine d'un corpo fisico reale, sia solido che liquido od aereiforme, perché tali corpi sono un insieme di entità più elementari, che sono gli atomi, o le molecole, del corpo, e le leggi della dinamica, se applicate ad un atomo, o molecola, considerato

come un punto materiale, si rivelano spesso inadeguate alla descrizione del comportamento dinamico di queste entità. Gli atomi e le molecole sono entità “microscopiche”, e la meccanica (non quantistica, in questo caso) è una teoria “macroscopica”: il punto materiale, il suo ente elementare di riferimento, è il modello matematico d’un corpo fisico di dimensioni sì molto piccole, ma ancora formato da un grande numero di atomi o molecole. Pertanto, alla luce di queste considerazioni, dobbiamo ritenere che: *i concetti della meccanica classica sono adeguati e sufficienti alla descrizione dinamica, su scala “macroscopica”*, di un insieme compattato, costituito da un grande numero di atomi o molecole..*

Per abbreviare, **postuleremo** che:

Le equazioni (1.35),(1.36) e (1.37), riferite ad ogni osservatore inerziale, o.i., sono vere (perché verificate senza errore sensibile) per ogni corpo fisico reale.

In linea di principio, le varie quantità globali che compaiono in queste equazioni, $\mathbf{R}^{(e)}$, \mathbf{Q} , \mathbf{K}_O , T , ecc., vanno calcolate a partire dagli attributi dinamici massa, posizione, velocità, ecc., che competono ad ogni atomo o molecola secondo i concetti della dinamica classica, e sommando poi su tutti gli atomi, o le molecole. Le (1.35),(1.36) e (1.37) sono quindi delle equazioni globali “molecolari”, per così dire, oppure “discrete”, perché relative ad un corpo ancora immaginato, giustamente, come un aggregato, più o meno densamente compattato, di punti materiali: in questo aggregato, il moto di un punto, cioè di un atomo o di una molecola, differisce in genere sensibilmente da quello dei vicini. Però l’immagine macroscopica che abbiamo dei corpi è un’altra: un corpo è immediatamente visto come un **continuo**, cioè un dominio, in senso matematico, nel quale la materia ed i suoi attributi sono distribuiti con sufficiente regolarità. Nei prossimi paragrafi vedremo brevemente come si definiscono le quantità dinamiche per i corpi ordinari schematizzati come continui. La precisazione corpi “ordinari” significa che ci riferiamo a corpi i cui atomi o molecole non interagiscono coll’esterno con loro eventuali momenti elettrici o magnetici, propri o indotti, in modo che l’interazione a lunga distanza agente è rappresentata solo da forze. Nel caso contrario, la trattazione di queste situazioni più complicate, per le quali è ancora corretto postulare le equazioni già considerate, è più opportuna in un secondo tempo, dopo aver preso familiarità con i risultati che scaturiscono dalla trattazione del caso ordinario.

1.13 Cinematica delle masse

Consideriamo un insieme, o sistema, di “punti-massa” $\{m_k, P_k\}$, m_k è la massa nel punto P_k , che può essere un insieme di particelle (macroscopiche), oppure un aggregato di atomi o molecole: per maggiore generalità, possiamo anche prevedere che qualche massa sia nulla, ma non tutte, in modo che è sempre $m = \sum_k m_k > 0$.

*Con osservazioni fatte ad un istante “macroscopico”, cioè con misure che sono spesso delle medie su un intervallo di tempo brevissimo, un “istante” sul piano macroscopico, ma ancora lungo dal punto di vista microscopico.

Se O è un punto, il vettore

$$\Sigma_k m_k OP_k$$

è detto il **momento statico** del sistema di punti massa rispetto al *polo* O .

Un punto G è detto il **centro di massa** del sistema, se il momento statico del sistema rispetto a questo punto è nullo

$$\Sigma_k m_k GP_k = 0.$$

Per trovare G , scritto che, come abbiamo già fatto nel § 2.6, $OP_k = OG + GP_k$, abbiamo ancora che

$$\Sigma_k m_k OP_k = OG \Sigma_k m_k + \Sigma_k m_k GP_k = m OG, \quad (i)$$

quindi

$$OG = \frac{\Sigma_k m_k OP_k}{\Sigma_k m_k}, \quad (1.38)$$

cioè nuovamente la relazione (2.14).

Quindi, come abbiamo già detto nel § 1.7, il centro di massa coincide col centro del sistema di forze peso $\{m_k \mathbf{g}, P_k\}$, cioè col baricentro dei pesi, ed è per questo che le due denominazioni vengono indifferentemente usate l'una al posto dell'altra.

La (i) è il caso particolare, relativo ad una distribuzione discreta di masse, del

Teorema del baricentro. *Il momento statico di un sistema di masse è uguale al momento statico dell'intera massa concentrata nel baricentro.*

È facile vedere che il centro di massa appartiene alla regione minimale convessa che contiene tutti i punti del sistema di masse.

Se i punti sono mobili, ancora dalla (i) ricaviamo che

$$\mathbf{Q} = \Sigma_k m_k \mathbf{v}_k = m \mathbf{v}_G, \quad (1.39)$$

cioè la formulazione del

Teorema della quantità di moto. *La quantità di moto di un sistema è uguale alla sua massa totale per la velocità del baricentro.*

Consideriamo ora un corpo esteso. Abbiamo già detto che dal punto di vista macroscopico questo corpo è visto come un *continuo*, cioè un insieme di punti mobili che ad ogni istante formano un dominio \mathcal{C} (in senso matematico) riempito dappertutto di materia, la cui frontiera \mathcal{S} è la *superficie* del corpo. Ogni punto mobile $P \in \mathcal{C}$ è ancora detto una “particella”, oppure una “molecola”, del continuo. Ogni particella del continuo rappresenta, con precisione sufficiente, il moto d'insieme d'un pezzettino del corpo fisico che contiene la particella, pezzettino sufficientemente piccolo da apparire puntiforme, o quasi, su scala macroscopica, ma ancora abbastanza grande da contenere un gran numero di atomi o molecole: per la materia ordinaria, e per i gas non rarefatti, questi requisiti non sono inconciliabili fra loro. Seguendo questa linea di ragionamento, chiameremo *dominio elementare (di media)* ogni parte, generalmente convessa, $\delta\mathcal{C}$ di \mathcal{C} molto piccola sul piano macroscopico, ma ancora

abbastanza grande su quello microscopico, in modo da contenere un elevato numero di atomi o molecole.

Sul dominio \mathcal{C} ed anche sulla sua frontiera \mathcal{S} , come vedremo, vengono assegnate delle funzioni sufficientemente regolari, il cui valore è la media su domini elementari di proprietà dinamiche degli atomi o molecole. Queste funzioni sono *funzioni macroscopiche* nel senso che sono a variabilità lenta, macroscopica appunto, e sono praticamente costanti in intorni dalle dimensioni di quelle dei domini elementari.

La prima funzione da considerare è la **densità di massa** $\varrho(P)$, non negativa, tale che se $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, la massa totale $m(\mathcal{C}')$ della materia contenuta in \mathcal{C}' è

$$m(\mathcal{C}') = \int_{\mathcal{C}'} \varrho(P) d\mathcal{C}', \quad (1.40)$$

senza errore sensibile.

Indicato con $\delta_r \mathcal{C}$ un dominio elementare di \mathcal{C} , e per semplicità anche la sua *estensione*, a seconda del senso del contesto, cosa possibile perché non accadrà mai un'ambiguità sul significato del simbolo; convenuto che $\sum_k^{\delta_r \mathcal{C}} \dots$ indica una somma su tutti gli atomi o molecole contenuti in $\delta_r \mathcal{C}$; in accordo con la (5.6) possiamo asserire che

$$\sum_k^{\delta_r \mathcal{C}} m_k = \varrho(P) \delta_r \mathcal{C}, \quad P \in \delta_r \mathcal{C},$$

a meno di un errore trascurabile, di “infinitesimi d'ordine superiore” in linguaggio matematico.

In un intervallo di tempo elementare dt , ogni pezzettino praticamente puntiforme del corpo contiene sempre gli stessi atomi o molecole (più o meno qualcuno), in modo che la sua massa è da ritenersi costante dal punto di vista macroscopico. D'altra parte, nello schema del continuo questo pezzettino è rappresentato da un dominio elementare $\delta_r \mathcal{C}$, sempre formato dalle stesse particelle, che durante dt si muove e si deforma secondo il moto delle sue particelle. Dobbiamo quindi concludere che, durante il moto di un dominio elementare sempre formato dalle stesse particelle, è

$$\frac{d}{dt} [\varrho(P) \delta_r \mathcal{C}] = 0, \quad P \in \delta_r \mathcal{C}, \quad (ii)$$

senza errore sensibile.

In termini finiti, se al variare del tempo \mathcal{C}' è sempre costituito dalle stesse particelle, la sua massa totale deve rimanere costante, quindi

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}'} \varrho(P) d\mathcal{C}' = 0. \quad (1.41)$$

La seconda funzione macroscopica è il campo delle velocità $\mathbf{v}(P) = \frac{d}{dt} P$ delle particelle P del continuo: questo campo è collegato alla densità di massa attraverso il teorema della quantità di moto. Se \mathbf{Q}_r è la quantità di moto totale degli atomi o molecole contenuti nel dominio elementare $\delta_r \mathcal{C}$, e $P \in \delta_r \mathcal{C}$, allora

$$\mathbf{Q}_r = \sum_k^{\delta_r \mathcal{C}} m_k \mathbf{v}_k = \varrho(P) \mathbf{v}(P) \delta_r \mathcal{C}, \quad (3i)$$

senza errore sensibile*.

La quantità di moto $\mathbf{Q}(\mathcal{C}')$ della parte \mathcal{C}' di \mathcal{C} , è uguale alla somma dei contributi dovuti ad una divisione di \mathcal{C}' in domini elementari; quindi, sommando il risultato (3i) su tutti i domini elementari di una divisione, e sostituendo poi alle somme gli integrali corrispondenti, senza commettere un errore sensibile, otteniamo che

$$\mathbf{Q}(\mathcal{C}') = \int_{\mathcal{C}'} \varrho(P) \mathbf{v}(P) d\mathcal{C}' . \quad (1.42)$$

Rileviamo esplicitamente che la linea di ragionamento scelta, che seguiremo ancora, consiste nel sostituire delle somme sui domini elementari di un dominio coi corrispondenti integrali sul dominio, visto la piccolezza di tali domini e la definizione di integrale.

Considerato ancora un dominio elementare $\delta_r \mathcal{C}$ sempre formato dalle stesse particelle, che in un intervallo di tempo elementare si muove e si deforma. Se $\mathbf{a}(P) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(P) = \dot{\mathbf{P}}$ è l'accelerazione della particella P del continuo, derivando la (3i) rispetto al tempo e tenendo conto della (ii), abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_r = \sum_k^{\delta_r \mathcal{C}} m_k \mathbf{a}_k = \varrho(P) \mathbf{a}(P) \delta_r \mathcal{C} .$$

Da questo risultato, con gli stessi ragionamenti seguiti per derivare la (1.42) dalla (3i), deduciamo che

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}(\mathcal{C}') = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}'} \varrho \mathbf{v} d\mathcal{C}' = \int_{\mathcal{C}'} \varrho \mathbf{a} d\mathcal{C}' . \quad (1.43)$$

Per un corpo ordinario il momento delle quantità di moto \mathbf{K}_r della materia contenuta in $\delta_r \mathcal{C}$ è

$$\mathbf{K}_r = OP \wedge \varrho(P) \mathbf{v}(P) \delta_r \mathcal{C} , \quad P \in \delta_r \mathcal{C} , \quad (4i)$$

per cui quello delle quantità di moto di tutta la materia contenuta in $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ risulta essere

$$\mathbf{K}_O(\mathcal{C}') = \int_{\mathcal{C}'} OP \wedge \varrho \mathbf{v} d\mathcal{C}' \quad (1.44)$$

senza errore sensibile.

Consideriamo ora la (4i) riferita ad un generico osservatore, inerziale o meno, in un (piccolo) intervallo di tempo durante il quale il dominio elementare $\delta_r \mathcal{C}$ è sempre formato dalle stesse particelle, caso già considerato in precedenza; derivandola rispetto al tempo e tenendo presente la (ii), se $\mathbf{v}_O = \dot{O}$, $\mathbf{v} = \dot{P}$ e $\mathbf{a} = \dot{P}$, abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_r = OP \wedge \varrho \mathbf{a} \delta_r \mathcal{C} - \mathbf{v}_O \wedge \varrho \mathbf{v} \delta_r \mathcal{C} ,$$

*Se accidentalmente il dominio elementare non è convesso e se il baricentro delle masse ivi contenute è esterno al dominio, la (3i) è ancora valida, perché essendo le funzioni ad ultimo membro macroscopiche, quindi costanti senza errore sensibile nell'involuppo minimale convesso del dominio elementare, al posto del baricentro può essere scelto un punto appartenente al dominio stesso.

ovvero

$$\dot{\mathbf{K}}_r + \mathbf{v}_O \wedge \varrho \mathbf{v} \delta_r \mathcal{C} = OP \wedge \varrho \mathbf{a} \delta_r \mathcal{C}.$$

Procedendo come al solito, cioè sommando quest'ultimo risultato su tutti i domini elementari di una divisione di \mathcal{C}' , e sostituendo poi alle somme i corrispondenti integrali, senza commettere un errore sensibile, concludiamo che è

$$\dot{\mathbf{K}}_O(\mathcal{C}') + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q}(\mathcal{C}') = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}'} OP \wedge \varrho \mathbf{v} d\mathcal{C}' + \mathbf{v}_O \wedge \int_{\mathcal{C}'} \varrho \mathbf{v} d\mathcal{C}' = \int_{\mathcal{C}'} OP \wedge \varrho \mathbf{a} d\mathcal{C}'. \quad (1.45)$$

Osserviamo esplicitamente che *le proprietà finora esposte, le (1.43) e (1.45) in particolare, sono relazioni assolute o obiettive, cioè vere per qualunque osservatore, inerziale o meno.* •

Ad una distribuzione continua di massa $\varrho(P)$ può essere applicata la definizione di momento statico rispetto ad un punto e quella di baricentro. Come abbiamo già detto alla fine del § 1.7, il passaggio dal discreto al continuo si effettua sostituendo, sia nelle ipotesi che nelle tesi, le somme che intervengono nel caso discreto con i corrispondenti integrali del caso continuo: gli enunciati del teorema del baricentro e di quello della quantità di moto rimangono ancora veri, nella forma generale già esposta.

Una distribuzione di masse ha carattere assoluto, quindi anche il baricentro della distribuzione ha carattere assoluto. Invece una quantità di moto, o una **densità di quantità di moto** $\varrho(P)\mathbf{v}(P)$ non hanno un carattere assoluto. La stessa conclusione è vera anche per il **momento delle quantità di moto** rispetto ad un polo O di una distribuzione di masse, sia discreta, $\{m_k \mathbf{v}_k, P_k\}$, che continua, $\varrho(P)\mathbf{v}(P)$. Per questa quantità vale però la proprietà che:

Il momento delle quantità di moto rispetto al baricentro di un insieme di masse mobili, è lo stesso per due osservatori in moto traslatorio l'uno rispetto all'altro.

Facendo ancora riferimento all'avvertenza esposta alla fine del § 1.7, è sufficiente provare l'affermazione per una distribuzione discreta di masse $\{m_k \mathbf{v}_k, P_k\}$.

Se \mathbf{v} è la velocità d'un secondo osservatore in moto traslatorio rispetto a quello attuale, le velocità rispetto al secondo sono $\mathbf{v}_k' = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}$, in modo che, se G è il baricentro delle masse, è, con ovvio significato dei simboli: $\mathbf{M}'_G = \sum_k GP_k \wedge m_k \mathbf{v}_k' = \sum_k GP_k \wedge m_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}) = \sum_k GP_k \wedge m_k \mathbf{v}_k - (\sum_k m_k GP_k) \wedge \mathbf{v} = \sum_k GP_k \wedge m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{M}_G$.

Limitandoci ora alla sola classe degli o.i., l'osservatore che si muove di moto traslatorio rispetto agli o.i., e rispetto al quale il baricentro di un sistema di masse mobili è sempre fermo, che dovrebbe essere chiamato *osservatore del baricentro*, seguendo la terminologia usata finora, per consuetudine sarà detto invece il **riferimento del baricentro**, ma questa denominazione non deve far pensare che si tratta necessariamente di una terna di riferimento, con centro nel baricentro ed orientamento invariabile rispetto agli osservatori inerziali.

1.14 Dinamica delle masse

La transizione dal discreto al continuo prosegue sostituendo, ad ogni istante, l'insieme microscopico formato da un numero enorme di vettori applicati $\{\mathbf{F}_k^{(e)}, P_k\}$, $\mathbf{F}_k^{(e)}$ è la forza esterna agente sull'atomo o molecola P_k , con delle funzioni macroscopiche, definite non solo sul continuo \mathcal{C} che rappresenta il corpo, ma anche sulla sua frontiera \mathcal{S} , rappresentante la superficie del corpo. La necessità della definizione di una funzione anche su \mathcal{S} viene dal fatto che sugli atomi o molecole presenti sulla superficie del corpo, e immediatamente sottostanti, possono agire delle forze dovute ad un'interazione diversa da quella a lunga distanza che applica delle forze esterne agli atomi o molecole all'interno del corpo: caso comune è quello dello scambio di contatto fra le superfici di due corpi che si toccano, oppure l'altro, delle forze di pressione esercitate sulla superficie di un corpo solido da parte di un ambiente liquido o gassoso che lo circonda. Dal punto di vista macroscopico, le forze di un'interazione esterna "distribuita" all'interno del corpo sono anche dette *forze di volume*, perché il risultante di tali forze, agenti su una piccola parte del corpo, è proporzionale, grosso modo, al volume di questa parte. Per motivi analoghi, le forze agenti sulla superficie del corpo sono dette di *superficie*: il risultante di quelle agenti su un piccolo pezzetto di superficie del corpo, rappresentante un pezzettino della "buccia" esterna del corpo, dallo spessore dell'ordine di qualche unità della distanza media fra gli atomi o molecole del corpo, è ancora proporzionale, grosso modo, all'area del pezzetto di superficie.

Nello schema del continuo, le forze di volume sono rappresentate da una **densità di forza** $\mathbf{f}(P)$, tale che per ogni dominio elementare $\delta_r\mathcal{C}$ è, a meno di un errore trascurabile,

$$\sum_k^{\delta_r\mathcal{C}} \mathbf{F}_k^{(e)} = \mathbf{f}(P)\delta_r\mathcal{C}, \quad P \in \delta_r\mathcal{C} \quad (i)$$

in modo che il risultante di tutte le forze esterne agenti sugli atomi o molecole del corpo è

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}(P) d\mathcal{C},$$

senza errore sensibile.

Le forze di superficie sono rappresentate da una **densità superficiale** $\mathbf{t}(P)$ definita sulla frontiera \mathcal{S} , tale che il risultante delle forze di superficie che agiscono su un pezzetto della buccia del corpo, piccola sul piano macroscopico, ma ancora abbastanza grande da contenere un gran numero di atomi o molecole, e rappresentata da un pezzettino elementare di estensione $d\mathcal{S}$, è uguale a $\mathbf{t} d\mathcal{S}$. Allora il risultante di tutte le forze di superficie è dato, senza errore sensibile, dall'integrale superficiale

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} d\mathcal{S}.$$

Il risultante di tutte le forze esterne agenti sul continuo \mathcal{C} è la somma dei due risultati già scritti, in modo che la prima equazione cardinale (1.35) assume ora la

forma più esplicita

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \, d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \, d\mathcal{S} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \varrho \mathbf{v} \, d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} \varrho \mathbf{a} \, d\mathcal{C}, \quad (1.46)$$

rispetto ad un o.i. qualunque.

Anche il momento risultante rispetto a O delle forze esterne di volume, agenti sull'intero corpo \mathcal{C} , è dato dall'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} OP \wedge \mathbf{f} \, d\mathcal{C},$$

e quello delle forze di superficie, agenti sulla superficie esterna \mathcal{S} del corpo, dall'altro

$$\int_{\mathcal{S}} OP \wedge \mathbf{t} \, d\mathcal{S},$$

senza errori sensibili

Rispetto ad ogni o.i., la somma di questi due risultati permette ora di scrivere anche la seconda equazione cardinale, $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{K}}_O + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q}$, nella forma più esplicita

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} OP \wedge \mathbf{f} \, d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{S}} OP \wedge \mathbf{t} \, d\mathcal{S} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} OP \wedge \varrho \mathbf{v} \, d\mathcal{C} + \mathbf{v}_O \wedge \int_{\mathcal{C}} \varrho \mathbf{v} \, d\mathcal{C} = \\ &= \int_{\mathcal{C}} OP \wedge \varrho \mathbf{a} \, d\mathcal{C}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Gli ultimi membri delle equazioni cardinali (1.46) e (1.47) consentono ora d'ottenere le espressioni corrispondenti rispetto ad un osservatore non inerziale \mathcal{O}' , con un procedimento analogo a quello seguito nella dinamica del punto materiale.

Se \mathbf{v} e \mathbf{a} sono stavolta la velocità e l'accelerazione rispetto a \mathcal{O}' di una particella P del continuo, \mathcal{C} , \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_c l'accelerazione di trascinamento e di Coriolis, in modo che $\mathbf{a} + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$ è l'accelerazione assoluta di P , richiamate le identità cinematiche obiettive (1.43) e (1.45), osservato anche che i primi membri delle (1.46) e (1.47) sono obiettivi, cioè gli stessi per tutti gli osservatori, abbiamo immediatamente sia la prima equazione cardinale

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \, d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{C}} (-\varrho \mathbf{a}_t) \, d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{C}} (-\varrho \mathbf{a}_c) \, d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} \varrho \mathbf{a} \, d\mathcal{C} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \varrho \mathbf{v} \, d\mathcal{C}, \quad (1.48)$$

che la seconda

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} OP \wedge \mathbf{f} \, d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{S}} OP \wedge \mathbf{t} \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{C}} OP \wedge (-\varrho \mathbf{a}_t) \, d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{C}} OP \wedge (-\varrho \mathbf{a}_c) \, d\mathcal{C} = \\ = \int_{\mathcal{C}} OP \wedge \varrho \mathbf{a} \, d\mathcal{C} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} OP \wedge \varrho \mathbf{v} \, d\mathcal{C} + \mathbf{v}_O \wedge \int_{\mathcal{C}} \varrho \mathbf{v} \, d\mathcal{C}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

dove \mathbf{v}_O è la velocità del polo O rispetto all'osservatore \mathcal{O}' .

In definitiva la (1.48) e la (1.49) si ottengono dalle (1.46) e (1.47), considerando come forze esterne in quest'ultime, non solo la densità delle forze reali \mathbf{f} , ma anche

quella delle forze di trascinamento, $-\rho\mathbf{a}_t$, e di Coriolis, $-\rho\mathbf{a}_c$. Dopo le forze gravitazionali, quest'ultime sono il secondo – ed ultimo – caso di *forze di (densità di) massa*, così dette perché sono proporzionali alla (densità di) massa. •

Terminiamo con un'osservazione.

Finora abbiamo sempre esaminato il caso d'un continuo tridimensionale, su cui gli attributi dinamici, quali densità di massa e di forza, sono distribuiti “tridimensionalmente”, o “bidimensionalmente” nel caso delle forze sulla superficie del continuo. Possono però capitare situazioni in cui questi attributi assumono un valore molto elevato, in parti del continuo che dal punto di vista macroscopico sono viste come superfici, linee, punti. In questi casi conviene considerare una seconda distribuzione degli attributi dinamici su queste superfici, linee o punti, come sovrapposta ad una distribuzione tridimensionale regolare: il calcolo delle quantità dinamiche globali, s'otterrà aggiungendo agli integrali già considerati, quelli su queste ulteriori superfici e linee, e le somme su distribuzioni discrete.

1.15 Energia cinetica e potenza

Nello schema del continuo, se, ad un istante generico, $\mathbf{v}(P)$ è il campo delle velocità delle particelle P di un continuo \mathcal{C} , rispetto ad un osservatore generico \mathcal{O} , e $\rho(P)$ quello della densità di massa, allora la quantità $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$ è per definizione la **densità di energia cinetica**, così come

$$T = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 d\mathcal{C} \quad (1.50)$$

è l'**energia cinetica** totale di \mathcal{C} rispetto a \mathcal{O} , inerziale o meno.

Dato un insieme di masse mobili rispetto a \mathcal{O} , esteso a queste masse ed a quest'osservatore la definizione di riferimento del baricentro, già considerata per gli o.i., come quell'osservatore che si muove di moto traslatorio rispetto a \mathcal{O} , e rispetto al quale il baricentro è sempre in quiete, vale il

Teorema di König. *L'energia cinetica di un insieme di masse mobili è uguale all'energia cinetica della massa totale “concentrata” nel baricentro, più l'energia cinetica delle masse relativa al riferimento del baricentro.*

Per le avvertenze già ricordate, è sufficiente provare l'enunciato per una distribuzione discreta di masse m_i di velocità \mathbf{v}_i rispetto a \mathcal{O} . Se \mathbf{v}_i' è la velocità d'una particella rispetto al riferimento del baricentro \mathcal{O}' , che si muove con velocità \mathbf{v}_G rispetto a \mathcal{O} , le velocità \mathbf{v}_i' sono tali che $\Sigma_i m_i \mathbf{v}_i' = 0$ (il baricentro è in quiete rispetto a \mathcal{O}'), ed essendo $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_G$, risulta che

$$\begin{aligned} T &= \Sigma_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_G)^2 = \\ &= \Sigma_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_G^2 + (\Sigma_i m_i \mathbf{v}_i') \cdot \mathbf{v}_G + \Sigma_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i'^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + T', \end{aligned}$$

essendo M la massa totale, $M = \Sigma_i m_i$, e T' l'energia cinetica totale rispetto a \mathcal{O}' .

Consideriamo ora un dominio elementare $\delta\mathcal{C}$ del continuo. Secondo i concetti della dinamica del punto materiale e per il teorema di König, l'energia cinetica degli atomi o molecole contenuti in $\delta\mathcal{C}$ è

$$\delta T = \sum_k^{\delta\mathcal{C}} \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2} \delta M \mathbf{v}_G^2 + \delta T', \quad (\text{i})$$

con ovvio significato dei simboli usati.

D'altra parte, nella descrizione del continuo $\delta M = \varrho(P)\delta\mathcal{C}$ e $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}(P)$ con $P \in \delta\mathcal{C}$, “a meno di infinitesimi di ordine superiore”, per cui la (i) diventa

$$\delta T = \frac{1}{2} \varrho(P) \mathbf{v}^2(P) \delta\mathcal{C} + \delta T'. \quad (\text{ii})$$

Diviso il continuo \mathcal{C} in domini elementari, la somma su tutti i domini elementari, dei valori del primo addendo del secondo membro della (ii), è uguale, senza errore sensibile, all'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} \varrho \mathbf{v}^2 d\mathcal{C},$$

che è per definizione l'energia cinetica del continuo.

La somma su tutti i domini elementari, dei valori dell'ultimo addendo a secondo membro della (ii) non è mai nulla. Questa quantità, che “scompare” dal modello di continuo con cui abbiamo schematizzato un corpo, è l'energia cinetica “di agitazione termica” degli atomi o molecole del corpo. Lo schema del continuo consente d'ottenere solamente l'energia cinetica relativa al moto d'insieme dei pezzettini elementari del corpo: l'energia cinetica di agitazione termica non appare più come una energia meccanica, ed il suo studio diventa compito della *termodinamica*.

Queste considerazioni valgono anche per il punto materiale, che non è altro che un corpo fisico ordinario di dimensioni trascurabili, sì da poterlo ritenere puntiforme, ma contenente ancora un elevato numero di atomi o molecole. Per questo corpo valgono le equazioni cardinali in primo luogo, poi, tenuto conto delle dimensioni trascurabili, la legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, dove m è la massa totale degli atomi o molecole del corpo, \mathbf{F} il risultante di tutte le forze esterne agenti sui suoi atomi o molecole, e \mathbf{a} l'accelerazione del moto macroscopico del corpo, assimilato ad un punto mobile. Allora l'espressione $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$, dove \mathbf{v} è la velocità del punto, non è tutta l'energia cinetica della materia del punto, ma solo quella relativa al suo moto macroscopico d'insieme, mentre manca l'energia totale di agitazione termica dei suoi atomi o molecole. Il punto può “riscaldarsi” o “raffreddarsi”, quindi su questo possono agire anche azioni “non meccaniche”, come come quelle “termiche”. ●

Anche la definizione di potenza, rispetto ad un osservatore generico, di una distribuzione continua di forze, cioè di una densità di forza, viene fatta secondo le indicazioni emerse dalla dinamica della particella. Se $\mathbf{f}(P)$ è una densità di forza sul continuo \mathcal{C} , $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}(P) \cdot \dot{P}$ è la **densità di potenza**, e la potenza totale di quel sistema di forze è data dall'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{C}.$$

Si procede in modo analogo anche per una distribuzione superficiale di forze, ad esempio quella delle forze esterne $\mathbf{t}(P)$ sulla frontiera \mathcal{S} di \mathcal{C} : $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}$ è una densità “superficiale” di potenza, e la potenza totale della distribuzione è

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{S}.$$

Nel caso nel caso di distribuzioni discrete o miste di forze si procede in modo analogo, secondo le avvertenze fatte al termine del paragrafo precedente. •

Infine, per concludere, poiché nello schema del continuo l'integrale (1.50) non dà tutta l'energia cinetica di tutti gli atomi o molecole del corpo, e la somma dei due integrali scritti sopra solo la potenza $W^{(e)}$ delle forze esterne, generalmente la differenza $\dot{T} - W^{(e)}$ è diversa da zero. Successivamente, questa differenza viene posta uguale alla potenza delle azioni interne – non delle forze, perché nei continui le azioni interne sono descritte da tensori del secondo ordine e non da vettori applicati, tali sono le forze – in modo da ristabilire anche per il continuo il teorema delle forze vive (1.37). Nella prossima sezione vedremo però che nel caso dei sistemi rigidi la differenza considerata è sempre nulla.