file: coset.tex

Meccanica Razionale 11/9/02

Usare fogli diversi per esercizi diversi Risolvere due dei seguenti esercizi e l'esercizio di meccanica analitica

Primo Esercizio.

Il funzionale:

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 - a^4 y^2) dx$$

nella classe di funzioni ammissibili:

$$A = \{y(x) \in C^4([0,1]), y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 0\}$$

ha per ogni $a > 0$ l'estremale $y(x) = 0$. Studiare l'insieme dei valori di a per cui esistono altri estremali oltre all'estremale identicamente nullo. Descrivere tramite un grafico tali valori di a.

Prima prova al calcolatore. Trovare per via numerica il primo dei valori eccezionali di a.

Secondo Esercizio

Trovare i punti fissi delle seguenti funzioni di variabile complessa:

$$F(z) = -iz(1-z)/2$$

$$F(z) = z^3 + (i+1)z$$

e discuterne la stabilitá.

Terzo Esercizio.

Provare che il funzionale:

$$J(y) = \int_{-1}^1 y'^2 dx + 2y(-1/2) + 2y(1/2)$$

nella classe di funzioni ammissibili:

$$A = \{y(x) \in C_s^1([-1,1]), y(-1) = 0, y(1) = 0\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo. Tracciare il grafico del minimo.

Seconda prova al calcolatore. Tracciare tramite MAPLE il grafico del minimo.

Quarto Esercizio.

Trovare l'hamiltoniana del sistema autonomo:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = sin(x) - cos(x) - cos(x)^2 + sin(x)^2$$

Dire qual'é lo spazio delle fasi naturale del sistema. Trovare i punti singolari e discuterne la natura e la stabilitá. Trovare l'equazione complessiva delle separatrici nei punti di sella e tracciarne il grafico. Descrivere le orbite periodiche. Tracciare il diagramma di fase del sistema.
Terza prova al calcolatore. Tracciare il diagramma di fase del sistema autonomo del quarto esercizio. In particolare tracciare le separatrici relative ai punti di sella.

Soluzione

Secondo Esercizio

Risolvendo l'equazione di Eulero: $y^{IV}+1=0$ con le condizioni imposte, $y(0)=0, y'(0)=1$ e quelle naturali, che in questo caso sono $y''(1)=0$ e $y'''(1)=0$, si trova la funzione:

$$y(x)=-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+x.$$

Per verificare che si tratta di un minimo assoluto si procede nel solito modo valutando l'incremento del funzionale.

Terzo Esercizio.

Sia $y(x)\in C^1_s([-1,1])$ tale che se $x\in[-1,0]$ $y(x)=y_1(x)\in C^2([-1,0])$, $y_1(-1)=0$, mentre se $x\in[0,1]$ $y(x)=y_2(x)\in C^2([0,1])$ $y_2(1)=0$ e $h(x)\in C^1_s([-1,1])$ arbitraria. $y(x)$ é una generica funzione dello spazio delle ammissibili. Valutando l'incremento del funzionale $J(y+h)-J(y)$ si trova, integrando per parti nei sottointervalli $[-1,0]$ e $[0,1]$,:

$$J(y+h)-J(y)=2(y_1'(0)-y_2'(0)+1)h(0)-\int_{-1}^{0}(y_1''-y_1)hdx+\int_0^1(y_2''-y_2)hdx$$

$$+\int_{-1}^{1}(h'^2+h^2)dx$$

Il problema che determina $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é quindi

$$y_1(-1)=0$$
$$y_1''(x)-y_1(x)=0$$
$$y_1(0)=y_2(0)$$
$$y_1'(0)-y_2'(0)+1=0$$
$$y_2(1)=0$$
$$y_2''(x)-y_2(x)=0.$$

Si trova

$$y_1(x)=-\frac{1}{2}sinh(x)-\frac{((e^2-1)cosh(x)}{e^2+1}$$

e

$$y_2(x)=\frac{1}{2}sinh(x)-\frac{((e^2-1)cosh(x)}{e^2+1}$$

che fornisce il minimo assoluto del funzionale nella classe indicata.

Quarto Esercizio.

Lo spazio delle fasi naturale del sistema é $S^1\times\mathbf{R}$. Il sistema é hamiltonianio di hamiltoniana:

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+cos(2x)+2cos(x)$$

I punti singolari sono:

$$P_1 = (\pi, 0)$$

Si tratta di una sella. L'equazione complessiva delle separatrici é data da:

$$H(x, y) = -1.$$

Vi sono poi i punti singolari

$$P_2 = (\frac{2}{3}\pi, 0),\ P_3 = (\frac{4}{3}\pi, 0)$$

si tratta di centri. Infine c'é un'altra sella

$$P_4 = (0, 0)$$

da identificare con $(2\pi, 0)$ a cui corrispondono le separatrici di equazione complessiva

$$H(x, y) = 3.$$

L'andamento delle orbite nel piano delle fasi é quello della figura allegata. Si noti che tutte le informazioni relative al diagramma di fase sonon deducibili dallo studio del grafico della funzione

$$cos(2x) + 2cos(x).$$