

file: coott.tex

## Meccanica Razionale. 1/10/ 2002

Usare fogli diversi per esercizi diversi Risolvere uno dei seguenti esercizi e l'esercizio di meccanica analitica

Primo Esercizio.

Provare che il funzionale:

$$J(y) = \int_0^1 (y'''^2 + 2y) dx$$

nella classe di funzioni ammissibili:

$$A = \{y(x) \in C^6([0, 1]), y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0\}$$

ha minimo assoluto e calcolarlo.

Prima prova al calcolatore

Trovare tramite MAPLE l'estremale che interviene nell'esercizio precedente e tracciarne il grafico.

Secondo Esercizio.

Provare che i seguenti funzionali nelle classi indicate hanno minimo assoluto e calcolarlo:

$$J_1(x) = \int_1^2 (t^2 x'^2 + 12x^2) dt$$

nella classe

$$A_1 = \{x(t) \in C^2([1, 2]); x(1) = 1, x(2) = 0\};$$

$$J_2(x) = \int_1^2 (t^2 x'^2 + 12x^2) dt$$

nella classe

$$A_1 = \{x(t) \in C^2([1, 2]); x(1) = 0, x(2) = 0\}.$$

Terzo Esercizio

Trovare l'armonica coniugata  $v(x, y)$  tale che  $v(0, 0) = 1$  della funzione

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 3x.$$

Posto  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , trovare i punti fissi della funzione  $f(z)$  e studiarne la stabilità.

Quarto esercizio.

Studiare il sistema autonomo piano

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sin(2x) - 2\cos(x)$$

nello spazio delle fasi  $S^1 \times \mathbf{R}^1$  e tracciarne il diagramma di fase.  
Seconda prova al calcolatore. Tracciare tramite MAPLE il diagramma di fase del sistema autonomo di cui sopra.

Soluzione

Primo Esercizio

Secondo Esercizio.

Lo spazio delle fasi naturale del sistema é  $S^1 \times \mathbf{R}$ . Il sistema é hamiltoniano di hamiltoniana:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \sin(x)\cos(x) + \sin(x) + \cos(x)$$

Tutte le informazioni relative al diagramma di fase sono deducibili dallo studio del grafico della funzione  $V(x) = \sin(x)\cos(x) + \sin(x) + \cos(x)$  (energia potenziale). In particolare:

$(\pi/4, 0)$  *sella*

$(\pi, 0)$  *centro*

$(5\pi/4, 0)$  *sella*

$(3\pi/2, 0)$  *centro*