1. Il calcolo delle variazioni

Per illustrare alcuni concetti di questo importante settore dell'analisi e della matematica applicata partiamo da un esempio molto semplice. Consideriamo la classe di funzioni

$$A = \{y(x) \in C^1[a,b]; y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$$

e l'applicazione $J : A \to \mathbb{R}^1$ definita tramite

$$J(y) = \int_a^b y'(x)^2 dx \ .$$

Ci chiediamo se esiste in A il minimo assoluto di $J(y)$ e cioè una funzione $\bar{y} \in A$ tale che $J(y) \geq J(\bar{y})$ per ogni $y \in A$. Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo, utilizzando la diseguaglianza di Cauchy–Schwartz,

$$y_b - y_a = \int_a^b y'(x)dx \leq \left(\int_a^b y'(x)^2 dx\right)^{1/2} (b-a)^{1/2} \ .$$

Ne segue

$\frac{(y_b-y_a)^2}{b-a} \leq \int_a^b y'(x)^2 dx$ per tutte le funzioni della classe ammissibile. D'altra parte, se

$$\bar{y}(x) = \frac{y(b) - y(a)}{b-a}(x-a) + y(a) \ ,$$

abbiamo subito $J(\bar{y}) = \frac{(y_b-y_a)^2}{b-a}$. Quindi $\bar{y}(x)$ realizza il minimo assoluto del funzionale nella classe indicata. Possiamo anche affrontare il problema in modo diverso e più "costruttivo". Sia $\bar{y}(x)$ una funzione di classe $C^2[a,b]$ appartenente alla classe delle ammissibili e $h(x)$ una funzione di classe $C^1[a,b]$ tale che $h(a) = 0$, $h(b) = 0$. È immediato verificare che la funzione

$$\bar{y}(x) + h(x)$$

descrive, al variare di $h(x)$, la classe delle ammissibili. Consideriamo l'incremento del funzionale

$J(\bar{y} + h) - J(\bar{y}) = 2\int_a^b \bar{y}'h'dx + \int_a^b h'^2 dx =$ (integrando per parti e tenendo conto che $h(a) = h(b) = 0$) $= -2\int_a^b \bar{y}''h dx + \int_a^b h'^2 dx$.

D'altra parte, se scegliamo $\bar{y}$ in modo da essere la soluzione (unica) del problema

$$\bar{y}'' = 0 \quad y(a) = y_a \quad y(b) = y_b \ ,$$

abbiamo

$$J(\bar{y} + h) - J(\bar{y}) = \int_a^b h^{'2} dx \geq 0 \ .$$

Quindi $\bar{y}(x)$ è il minimo assoluto cercato.

Esercizio. Provare che esiste il minimo assoluto del funzionale

$$J(y) = \int_a^b |y'(x)|^p dx$$

nella classe $A = \{y(x) \in C^1[a, b] \ ; \ y(a) = y_a, \ y(b) = y_b\}$ quando $1 \leq p < \infty$. Si consiglia di utilizzare la diseguaglianza di Hölder.

Esercizio. Esiste il minimo assoluto del funzionale dell'esercizio precedente nella classe A quando $0 < p < 1$?

Esercizio. Fra tutte le curve del piano che congiungono i punti $(a, y_a), (b, y_b)$ e che sono dei grafici di funzioni $C^1[a, b]$ trovare quella di lunghezza minima e provare che è unica. Si tratta evidentemente di cercare il minimo del funzionale

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

nella solita classe A. Si consiglia di applicare il teorema fondamentale del calcolo alla funzione $g(t) = (b - a)(t - a) + (y_b - y_b)(y(t) - y_a)$.

2. Alcuni problemi storici

Dopo questi esempi elementari vale la pena di aprire una piccola parentesi storica. Forse il più famoso problema di calcolo delle variazioni è quello della *brachistocrona* proposto nel 1696 da Giovanni Bernoulli ai matematici d'Europa e risolto da I. Newton. Consideriamo in un piano verticale con asse Oy verticale e orientato verso il basso due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 > x_1, y_1 > y_2$ e sia $y(x) \in C^1[x_1, x_2]$ una assegnata funzione tale che

$$y(x_1) = y_1, \ y(x_2) = y_2 \ , \quad y(x) > y_1 \ \text{ per } \ x \in (x_1, x_2] \ .$$

Un punto P di massa m è libero di muoversi senza attrito sul grafico della $y(x)$ sotto l'azione della sola forza peso. Scrivendo l'integrale dell'energia e separando le variabili è facile calcolare il tempo di caduta che il punto impiega per andare da P_1 a P_2. Si trova

$$T = J(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)-y_1+\alpha}}$$

dove $\alpha = \frac{1}{2g}|\mathbf{v}_o|^2$. Ad ogni funzione della classe delle ammissibili il funzionale $J(y)$ associa il tempo di caduta. Ci chiediamo se esista un tempo minimo di caduta.

Il problema della superficie di rotazione di area laterale minima

Facendo ruotare il grafico di una funzione $y(x) \in C^1[a,b]$ positiva attorno all'asse x si genera una superficie di rotazione la cui area laterale è data, come è noto, da

$$\text{Area Laterale} = J(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'(x)^2}dx \ .$$

La classe delle ammissibili è ancora

$$A = \{y(x) \in C^1[a,b] \ ; \ y(a) = y_a, \ y(b) = y_b, \ y(x) > 0\} \ .$$

È intuitivamente chiaro che in certi casi la "soluzione" (non più appartenente alla classe delle ammissibili) del problema di minimo sarà data da due cerchi paralleli di raggi $y(a)$ e $y(b)$.

Il problema del solido di rotazione di minima resistenza

Si cerca il solido di rivoluzione che incontra la minima resistenza quando si muove di moto uniforme in un mezzo resistente come l'aria. La formulazione data da Newton a questo problema comporta la minimizzazione del funzionale

$$J(y) = \int_0^a \frac{x}{1+y'(x)^2}$$

nella classe

$$A = \{y(x) \in C^1[a,b] \ ; \ y(a) = y_a, \ y(b) = y_b, \ y(x) \geq 0\} \ .$$

Il problema, oltre al valore storico, è interessante perché mette in luce una difficoltà tipica: è infatti privo sia di minimo che di massimo assoluto nella classe A, che quindi deve essere opportunamente ristretta.

Il problema di Didone

Nella classe B di tutte le curve piane, semplici, rettificabili, chiuse di data lunghezza L, trovare quella che racchiude la porzione di piano di area A massima. Il problema differisce dai precedenti poiché la classe delle ammissibili non è composta da grafici e per la condizione aggiuntiva della lunghezza prescritta. Se accettiamo (vedi la dimostrazione più avanti) la validitá della diseguaglianza isoperimetrica

$$\frac{L^2}{4\pi} \geq A \tag{1}$$

la soluzione del problema è immediata. Possiamo infatti definire il funzionale

$$J(\mathcal{C}) = A \quad \mathcal{C} \in B \ .$$

Per la (1) abbiamo $J(\mathcal{C}) \leq \frac{L^2}{4\pi}$ per ogni $\mathcal{C} \in B$. D'altra parte se $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}$, dove $\tilde{\mathcal{C}}$ è il cerchio di raggio $R = L/2\pi$, otteniamo $J\tilde{\mathcal{C}} = \frac{L^2}{4\pi}$ e quindi $\tilde{\mathcal{C}}$ è la soluzione del problema. Possiamo formulare il problema di Didone anche nell'ambito dei grafici cercando il massimo del funzionale

$$J(y) = \int_{-a}^{a} y(x)dx$$

nella classe di ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^1[-a,a],\ y(-a) = y(a) = 0,\ \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = L\}$$

con la condizione $L \geq 2a$. Si trova ovviamente un settore circolare.

Esempio. Quale esempio di problema isoperimetrico elementarmente risolubile cerchiamo il minimo del funzionale

$$J(q) = \int_0^1 q'(t)^2 dt$$

nella classe di ammissibili

$$A = \{q(t) \in C^1[0,1],\ q(0) = 1,\ q(1) = 6,\ \int_0^1 q(t)dt = 3\} \ .$$

Sia $\bar{q}(t)$ una funzione ammissibile di classe $C^2[0,1]$ e consideriamo una funzione $h(t) \in C^1[0,1]$ tale che

$$h(0) = h(1) = 0 \quad \int_0^1 h(t)dt = 0 \ .$$

Al variare di $h(t)$ la funzione $\bar{q}(t) + h(t)$ genera la classe delle ammissibili. Abbiamo, integrando per parti,

$$J(\bar{q}+h) - J(\bar{q}) = 2\int_0^1 \bar{q}'h'dt + \int_0^1 h^{'2}dt = -2\int_0^1 \bar{q}''hdt + \int_0^1 h^{'2}dt \ .$$

Poiché $\int_0^1 h(t)dt = 0$ il termine $-2\int_0^1 \bar{q}''hdt$ è nullo se prendiamo $\bar{q}'' = C_1$. Integrando abbiamo $\bar{q}(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + c$. Le costanti a, b, c si calcolano con le condizioni $\bar{q}(0) = 1,\ \bar{q}(1) = 6,\ \int_0^1 \bar{q}(t)dt = 3$ e si trova $\bar{q}(t) = 3t^2 + 2t + 1$ che dà il minimo assoluto.

È facile vedere che le funzioni C^1 sono inadeguate anche per trattare situazioni molto semplici. Cerchiamo, per esempio, il minimo assoluto del funzionale

$$J(q) = \int_0^2 q^{'2}(1-q')^2 dt \quad \text{con le condizioni} \quad q(0) = 0 \quad q(2) = 1 \ .$$

È evidente che tutte le spezzate di estremi $(0,0)$ e $(2,1)$ e lati paralleli o all'asse t o alla retta $q = t$ rendono nullo il funzionale, d'altra parte $J(q) \geq 0$. Ognuna di queste spezzate fornisce quindi un minimo assoluto che non è C^1. Per formulare problemi di questo tipo dobbiamo definire nuove classi di funzioni.

3. Funzioni continue a tratti e funzioni C^1 a tratti

Indicheremo con $D^0[a,b]$ la totalità delle funzioni continue in $[a,b]$ eccetto, al più, un numero finito di punti in ciascuno dei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro della funzione. $D^1[a,b]$ sarà la classe delle funzioni continue in $[a,b]$, derivabili con derivata continua eccetto, al più, un numero finito di valori in ciascuno dei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata. Questo, come subito segue dal teorema di Lagrange, implica che in ciascuno dei punti di discontinuità della derivata esiste la derivata destra e sinistra.
Se $q(t) \in D^0[a,b]$ abbiamo

$$\phi(t) = \int_a^t q(z)dz \in D^1[a,b] \ .$$

Inoltre $\phi'(t) = q(t)$ eccetto gli eventuali punti di discontinuità di $q(t)$ (e.e.p.d.d.). Come è noto, se $u(t),\ v(t) \in D^1[a,b]$, vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = -\int_a^b u'(t)v(t)dt + [u(t)v(t)]_b^a \ . \tag{1}$$

Una classe di ammissibili ragionevole per l'esempio precedente è quindi

$$A = \{y(x) \in D^1[a,b]; y(a) = y_a, y(b) = y_b\} \ .$$

In certi casi anche le funzioni C^1 a tratti sono inadeguate. Si consideri per esempio il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 x^{2/3} {y'}^2 dx \quad \text{con le condizioni } y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \ .$$

È facile vedere che $\tilde{y}(x) = x^{1/3}$ fornisce il minimo assoluto di $J(y)$, ma evidentemente $\tilde{y}(x)$ non appartiene alla classe $D^1[a,b]$. Esiste anche un motivo più profondo per allargare ulteriormente la classe delle ammissibili ed è la quasi impossibilità di dimostrare teoremi di esistenza del minimo nella classe $D^1[a,b]$. Conviene, per questi motivi, introdurre una ulteriore classe di funzioni.

Le funzioni assolutamente continue

Una funzione $q(t)$ si dice assolutamente continua se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon)$ tale che per ogni sistema finito $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ di sottointervalli aperti e disgiunti di $[a,b]$ tali che

$$\sum_{k=1}^{N} |\beta_k - \alpha_k| < \delta(\epsilon)$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{N} |q(\beta_k) - q(\alpha_k)| < \epsilon \ .$$

Indicheremo la totalità delle funzioni assolutamente continue con $AC[a,b]$. Le funzioni di $D^1[a,b]$ sono assolutamente continue. Se una funzione $f(t)$ è integrabile secondo Lebesgue, e cioè $f(t) \in L^1(a,b)$, la funzione

$$q(t) = \int_a^t f(z) dz$$

è assolutamente continua, come subito segue dall'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue. Viceversa, se $\phi(t) \in AC[a,b]$, la derivata $\phi'(t)$ di $\phi(t)$ (limite del rapporto incrementale) esiste quasi ovunque, eccetto in punti di un insieme di misura nulla, e inoltre $\phi'(t) \in L^1(a,b)$, mentre vale la formula fondamentale del calcolo

$$\phi(t) = \phi(a) + \int_a^t \phi'(z) dz \ .$$

Per le funzioni assolutamente continue, vale ancora la formula di integrazione per parti (2).

4. Il problema "semplice" del calcolo delle variazioni

Data una funzione $L(t,q,z) \in C^1([a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, che chiameremo funzione lagrangiana, consideriamo il funzionale

$$J(q) = \int_a^b L(t, q(t), q'(y))dt \tag{1}$$

definito in una delle seguenti classi

$$A_1 = \{q(t) \in D^1[a,b],\ q(a) = q_a, q(b) = q_b\}$$

(problema con estremi fissati)

$$A_2 = \{q(t) \in D^1[a,b],\ q(a) = q_a\}$$

(problema con un estremo libero)

$$A_3 = \{q(t) \in D^1[a,b]\}$$

(problema con estremi liberi). Useremo i seguenti lemmi, la cui dimostrazione si lascia come esercizio

Lemma 1. Se $f(t) \in D^0[a,b]$ tale che $f(t) \geq 0$ e $\int_a^b f(t)dt = 0$, allora $f(t) = 0$ eccetto gli eventuali punti di discontinuità.

Lemma 2. Se $f(t) \in L^1[a,b]$ tale che $f(t) \geq 0$ e $\int_a^b f(t)dt = 0$, allora $f(t) = 0$ quasi ovunque.

5. Funzionali inferiormente limitati, ma privi di minimo assoluto

Il seguente esempio è stato proposto da Weierstrass in relazione al principio di Dirichlet. Consideriamo il funzionale

$$J(q) = \int_{-1}^{1} t^2 q'^2 dt$$

nella classe

$$A = \{q(t) \in D^1[a,b];\ q(-1) = -1\ q(1) = 1\}\ .$$

Proviamo intanto che l'estremo inferiore del funzionale nella classe A è zero. Evidentemente $J(q) \geq 0$. D'altra parte per la successione di funzioni ammissibili

$$q_n(t) = \begin{array}{ll} -1 & \text{se } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \text{se } -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} < t < 1 \end{array}$$

abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} J(q_n) = 0\ .$$

Ne segue che

$$\inf\{J(q); q \in A\} = 0.$$

Supponiamo per assurdo che esista il minimo assoluto $\bar{q}(t) \in A$ del funzionale. Può solo essere $J(\bar{q}) = 0$ e cioè

$$\int_{-1}^{1} t^2 \bar{q}'^2(t) dt = 0\ .$$

D'altra parte la funzione $t^2\bar{q}'^2(t)$ è continua a tratti e non negativa, per cui eccetto gli eventuali punti di discontinuità si ha $\bar{q}'(t) = 0$. Tenendo conto che $\bar{q}(t)$ è una funzione continua, avremo che $\bar{q}(t)$ è costante, fatto questo incompatibile con le condizioni per $t = -1$ e $t = 1$. Il funzionale è quindi privo di minimo assoluto. Il ragionamento può essere facilmente adattato al caso in cui la classe delle funzioni ammissibili é:

$$A = \{q(t) \in C^1[a,b];\ q(-1) = -1\ q(1) = 1\}\ .$$

.

Come secondo esempio consideriamo il funzionale

$$J(q) = \int_0^1 \left[(q'^2 - 1)^2 + q^2 \right] dt$$

nella classe

$$A = \{q(t) \in D^1[a,b];\ q(0) = 0,\ q(1) = 0\}\ .$$

Anche questo funzionale è privo di minimo assoluto in A. Infatti $\inf\{J(q); q \in A\} = 0$. Basta osservare che $J(q) \geq 0$ e considerare la successione di funzioni ammissibili

$$q_n(t) = \int_0^t \text{sign} \sin 2\pi 2^{n-1} \tau d\tau$$

i cui grafici sono riportati nella figura per $n = 1, 2, 3, 4$.

Abbiamo $q_n'^2(t) = 1$, per cui

$$0 \leq J(q_n) \leq \frac{1}{n^2}\ .$$

Ne segue $\inf\{J(q); q \in A\} = 0$. Supponiamo per assurdo che esista il minimo assoluto $\bar{q}(t)$ del funzionale. Deve essere $J(\bar{q}) = 0$ e cioè

$$\int_0^1 \left[(\bar{q}'^2 - 1)^2 + \bar{q}^2 \right] dt = 0\ .$$

Come ulteriore esempio esaminiamo il funzionale

$$J(q) = \int_0^1 \sqrt{q^2 + q'^2 dt}$$

e proviamo che è privo di minimo assoluto nella classe $A_1 = \{q(t) \in D^1[0,1],\ q(0) = 0,\ q(1) = 1\}$. Infatti

$$J(q) \geq \int_0^1 q'(t) dt = 1 \quad \text{per ogni} \quad q(t) \in A_1\ .$$

Ma la successione di funzioni $q_k(t) = 0$ se $0 \leq t \leq 1 - 1/k$, $q_k(t) = 1 - k(t-1)$ se $1 - 1/k < t \leq 1$, è tale che $J(q_k) \to 0$ se $k \to \infty$. Quindi

$$\inf\{J(q);\ q \in A_1\} = 1.$$

Se, per assurdo, esistesse un minimo assoluto $\bar{q}(t)$ del funzionale, avremmo

$$\int_0^1 \left[\sqrt{\bar{q}(t)^2 + \bar{q}'(t)^2} - \bar{q}'(t)\right] dt = 0$$

da cui segue $\sqrt{\bar{q}(t)^2 + \bar{q}'(t)^2} - \bar{q}'(t) = 0$ e anche $\bar{q}(t)^2 = 0$. Questo è incompatibile con le condizioni per $t = 0$ e $t = 1$.

Esercizio. Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt[4]{1 + y'^2} dx$$

è privo di minimo assoluto nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0,1],\ y(0) = 0,\ y(1) = 1\}$.

Esercizio. Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^2 (y'^4 - 6y'^2 dx)$$

ha minimi assoluti nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0,2], \bar{y}(0) = 0\ y(2) = 0\}$. Trovarli e trovare il valore numerico di tale minimo.

Riprendiamo in esame il funzionale che interviene nel problema del solido di rotazione di minima resistenza e cioè

$$J(y) = \int_0^a \frac{x\ dx}{1 + y'^2(x)}$$

nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0,a],\ y(x) \geq 0,\ y(0) = 0,\ y(a) = b\}$. Proviamo che $J(y)$ è privo di minimo assoluto. Abbiamo intanto $J(y) \geq 0$ per ogni $y \in A_1$. Inoltre, se consideriamo la successione di funzioni ammissibili $y_n(x) = 2nx/a$ quando $0 \leq x \leq a/2$, $y_n(x) = 2(b-n)x/a$ se $a/2 < x \leq a$, troviamo subito $J(y_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Quindi $\inf\{J(y), y \in A_1\} = 0$. Se per assurdo esiste $\bar{y}(x) \in A_1$ tale che $J(\bar{y}) = 0$, si ha anche $x/(1 + \bar{y}^2) = 0$, e questo non può essere. Occorre, per dare senso al problema, restringere la classe delle funzioni ammissibili aggiungendo la condizione $y'(x) \geq 0$.

Esercizio. Mostrare che il funzionale $J(y)$ è anche privo di massimo assoluto.

6. Massimi e minimi relativi deboli e forti

Oltre ai minimi e massimi assoluti per il problema semplice del calcolo delle variazioni si pongono anche le seguenti definizioni: $\bar{q}(t) \in A_k$ è un minimo relativo forte per $J(y)$ nella classe A_k, $(k = 1, 2, 3,)$ se esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $q(t) \in N_\rho^{(0)}(\bar{q}) \cap A_k$ si ha $J(q) \geq J(\bar{q})$, dove

$$N_\rho^{(0)}(\bar{q}) = \{q(t) \in D^1[a, b];\ |\bar{q}(t) - q(t)| < \rho\}\ .$$

Diremo che $\bar{q}(t)$ è un minimo relativo debole per $J(q)$ in una delle classi A_k se esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $q(t) \in N_\rho^{(1)}(\bar{q}) \cap A_k$ si ha $J(q) \geq J(\bar{q})$, dove

$$N_\rho^{(1)}(\bar{q}) = \{q(t) \in D^1[a, b];\ |\bar{q}(t) - q(t)| < \rho, |\bar{q}'(t) - q'(t)| < \rho\}\ .$$

Analoghe definizioni si danno per i massimi relativi deboli e forti. È evidente che un minimo (massimo) relativo forte è anche un minimo (massimo) relativo debole, ma non viceversa, come mostra il seguente

Esempio. $J(q) = \int_0^1 (q^{'2} + q^{'3})dt$ nella classe $A_1 = \{q(t) \in D^1[01,],\ q(0) = 0,\ q(1) = 0\}$. È immediato verificare che $\bar{q}(t) = 0$ per ogni $t \in [0, 1]$ è un minimo relativo debole per $J(y)$. Basta infatti prendere $\rho = 1/2$ nella definizione. D'altra parte $\bar{q}(t)$ non è un minimo relativo forte. Per dimostrare questo fatto occorre provare che per ogni $\rho > 0$ esiste $q(t) \in N_\rho^{(0)}(\bar{q})$ tale che $J(q) < J(\bar{q})$. Consideriamo a tal fine la successione di funzioni ammissibili:

$$q_\epsilon(t) = \epsilon t/(1 - \epsilon^2) \ \text{ se } \ 0 \leq t \leq 1 - \epsilon^2,\ q_\epsilon(t) = (1 - t)/\epsilon \ \text{ se } \ 1 - \epsilon^2 \leq t \leq 1\ .$$

Troviamo subito $J(q_\epsilon) \to -\infty$ quando $\epsilon \to 0+$. Poiché $q_\epsilon(t) \to 0$ se $\epsilon \to 0+$, concludiamo che $\bar{q}(t)$ non è un minimo relativo forte.

7. Condizione necessaria perché una funzione ammissibile sia un minimo relativo debole in una delle classi A_1, A_2 o A_3

Supponiamo che $\bar{q}(t) \in A_1$ sia un minimo relativo debole di $J(q) = \int_a^b L(t, q, q')dt$ nella classe A_1. Se fissiamo una funzione $\eta(t) \in D^1[a, b]$ tale che $\eta(a) = 0$ e $\eta(b) = 0$, la funzione $\bar{q}(t)+\epsilon\eta(t)$ appartiene per ogni ϵ ad A_1. Ricordando la definizione di minimo relativo debole esiste, $\epsilon > 0$ tale che se $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, allora $\bar{q}(t)+\epsilon\eta(t) \in N_\rho^{(1)}(\bar{q})\cap A_1$, dove ρ è la costante di cui si parla nella definizione di minimo relativo debole. La funzione della variabile reale $g(\epsilon) = J(\bar{q} + \epsilon\eta)$ ha per $\epsilon = 0$ un minimo relativo. D'altra parte, per il teorema di derivazione, sotto il segno di integrale $g'(0)$ esiste e si ha $g'(0) = 0$. Il calcolo di $g'(0)$ mostra che si ha

$$g'(0) = J_1(\bar{q}, \eta) = \int_a^b \left[\hat{L}_q(t)\eta(t) + \hat{L}_{q'}(t)\eta'(t)\right] dt$$

dove abbiamo posto per comodità

$$\hat{L}_q(t) = L_q(t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)) \qquad \hat{L}_q(t) = L_{q'}(t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)) \ .$$

Concludiamo con il seguente

Lemma. Condizione necessaria perché $\bar{q}(t)$ sia un minimo (o massimo) relativo debole del funzionale $J(q)$ nella classe A_1 è che si abbia

$$(I) \qquad J_1(\bar{q}, \eta) = 0 \quad \text{per ogni} \quad \eta(t) \in D^1[a, b] \ \text{ tale che } \ \eta(a) = 0, \ \eta(b) = 0 \ .$$

In modo analogo abbiamo il

Lemma. Condizione necessaria perché $\bar{q}(t)$ sia un minimo (o massimo) relativo debole del funzionale $J(q)$ nella clase A_2 è che valga

$$(II) \qquad J_1(\bar{q}, \eta) = 0 \quad \text{per ogni} \quad \eta(t) \in D^1[a, b] \ \text{ tale che } \ \eta(a) = 0 \ .$$

Infine vale il

Lemma. Condizione necessaria perché $\bar{q}(t)$ sia un minimo (o massimo) relativo debole del funzionale $J(q)$ nella clase A_3 è che si abbia

$$\text{(III)} \qquad J_1(\bar{q}, \eta) = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a, b] \ .$$

L'espressione $J_1(\bar{q}, \eta)$ si chiama variazione prima del funzionale e i lemmi precedenti sono l'analogo del teorema di Fermat per le funzioni di variabile reale.

Utilizzando i due lemmi che seguono ricaveremo dalle condizioni (I), (II) e (III) ulteriori condizioni necessarie.

Lemma (Fondamentale del calcolo delle variazioni). Se $f(t) \in C^0[a,b]$ soddisfa la condizione

$$\int_a^b f(t)\eta(t)dt = 0 \tag{1}$$

per ogni funzione $\eta(t) \in D^1[a,b]$ tale che $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 0$, si ha $f(t) = 0$ in $[a,b]$.

Dim. Supponiamo che esista $\tilde{t} \in (a,b)$ tale che $f(\tilde{t}) \neq 0$, per esempio $f(\tilde{t}) > 0$. Per la permanenza del segno delle funzioni continue esiste un intervallo (ξ_0, ξ_1) contenente $\tilde{t}$ tale che $f(t) > 0$ in (ξ_0, ξ_1). Scegliamo nella (1) una funzione $\eta_1(t)$ così definita: $\eta_1(t) = 0$ in $[a,b]\backslash(\xi_0, \xi_1)$ e $\eta_1(t) = (t-\xi_0)^{2m}(t-\xi_1)^{2m}$ per $t \in (\xi_0, \xi_1)$ con $m \geq 1$. Evidentemente $\eta_1(t) \in D^1[a,b]$ e $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$. D'altra parte

$$\int_a^b f(t)\eta_1(t)dt > 0 \tag{2}$$

in contrasto con (1). □

Lemma (Du Boys–Reymond). Se $f(t) \in D^0[a,b]$ è tale che

$$\int_a^b f(t)\eta'(t)dt = 0 \tag{3}$$

per ogni $\eta(t) \in D^1[a,b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ la funzione $f(t)$ è costante eccetto gli eventuali punti di discontinuità che sono quindi punti di discontinuità eliminabile.

Dim. Definiamo $C = (b-a)^{-1}\int_a^b f(t)dt$ e consideriamo la funzione

$$\eta(t) = \int_a^b (f(\tau) - C)dt$$

. Abbiamo $\eta(t) \in D^1[a,b]$ e anche $\eta(a) = \eta(b) = 0$, $\eta'(t) = f(t) - C$. Per la (3) vale

$$0 = \int_a^b f(t)(f(t)-C)dt = \int_a^b (f(t)-C+C)(f(t)-C)dt =$$
$$\int_a^b (f(t)-C)^2dt + C\int_a^b (f(t)-C)dt = \int_a^b (f(t)-C)^2dt$$

quindi $f(t) = C$ e.e.p.d.d. □

8. Prima forma integrale dell'equazione di Eulero

Teorema Sia $L(t,q,q') \in C^1[a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$, $\bar{q}(t) \in D^1[a,b]$ e valga

$$(I)\ J_1(\bar{q},\eta) = 0 \quad \text{per ogni} \quad \eta(t) \in D^1[a,b] \quad \text{tale che} \quad \eta(a) = 0,\ \eta(b) = 0$$

esiste una costante C tale che

$$\hat{L}_{q'}(t) = \int_a^t \hat{L}_q(\tau)d\tau + C \qquad C = \hat{L}_q(a) \quad \text{e.e.p.d.d. di } \bar{q}'(t) \tag{1}$$

$$\hat{L}_q(t) = L_q(t,\bar{q}(t),\bar{q}'(t)) \qquad \hat{L}_q(t) = L_{q'}(t,\bar{q}(t),\bar{q}'(t))\ .$$

Dim. 1) Consideriamo preliminarmente il teorema in ipotesi più restrittive e precisamente $L(t,q,q') \in C^2([a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1), \bar{q}(t) \in C^2[a,b]$. Si tratta di ipotesi innaturali (specialmente la seconda), ma legittime. Possiamo integrare per parti nel secondo termine della relazione

$$\int_a^b \Big[\hat{L}_q(t)\eta(t) + \hat{L}_{q'}(t)\eta'(t)\Big]\,dt \quad \text{per ogni} \quad \eta(t) \in D^1[a,b] \quad \text{tale che} \quad \eta(a) = 0, \eta(b) = 0$$

e ottenere

$$\int_a^b \left[\hat{L}_q(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{q'}(t)\right] \eta'(t)dt = 0 \ \text{ per ogni } \eta(t) \in D^1[a,b] \text{ tale che } \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\,.$$

Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni abbiamo

$$\hat{L}_q(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{q'}(t) = 0\ . \tag{2}$$

Pensando la (2) come una equazione del secondo ordine in $q(t)$, essa coincide con l'equazione di Lagrange dei sistemi con un sol grado di libertà. Integrando la (2) fra 0 e t otteniamo la (1). L'integrazione per parti è resa lecita dall'ipotesi $\bar{q}(t) \in C^2[a,b]$. Se supponiamo semplicemente $\bar{q}(t) \in D^1[a,b]$ occorre procedere nel modo seguente: definiamo la funzione

$$\Phi(t) = \int_a^b \hat{L}_q(\tau)d\tau\ .$$

Poiché $\hat{L}_q(t) \in D^0[a,b]$ si ha $\Phi(t) \in D^1[a,b]$ e anche $\Phi'(t) = \hat{L}_q(t)$, eccetto gli eventuali punti di discontinuità di $\bar{q}'(t)$. Abbiamo

$$\int_a^b \Big[\Phi'(t)\eta(t) + \hat{L}_{q'}(t)\eta'(t)\Big]\,dt = 0 \ \text{ per ogni } \eta(t) \in D^1[a,b] \text{ tale che } \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\,.$$

L'integrazione per parti nel primo termine è ora lecita. Otteniamo, tenendo conto che $\eta(a) = 0, \eta(b) = 0$,

$$\int_a^b \Big[-\Phi(t) + \hat{L}_{q'}(t)\Big]\,\eta'(t)dt = 0 \ \text{ per ogni } \eta(t) \in D^1[a,b] \text{ tale che } \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\,.$$

Dal lemma di Du Boys–Reymond segue la tesi (1). $\square$

Esercizio. Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1+x+x^2}{y'}^2 dx$$

ha minimo assoluto nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[a,b], y(0) = 1, y(1) = 0\}$ e trovarlo.

Vediamo quali conseguenze possiamo avere dalla (III).

Teorema 2. Sia $L(t, q, q') \in C^1([a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ e $\bar{q}(t) \in D^1[a,b]$ tale che

$$J_1(\bar{q}, \eta) = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b] \ .$$

Proviamo che si ha

$$\hat{L}_{q'}(t) = \int_a^t \hat{L}_q(\tau) d\tau \tag{3}$$

$$\hat{L}_{q'}(a) = 0 \qquad \hat{L}_{q'}(b) = 0 \ . \tag{4}$$

Dim. Anche in questo caso, se supponiamo $\bar{q}(t) \in C^2[a,b], L \in C^2$, possiamo procedere alla "Eulero" e integrare per parti nel secondo termine di

$$\int_a^b \left[\hat{L}_q(t)\eta(t) + \hat{L}_{q'}(t)\eta'(t)\right] dt = 0$$

grazie al fatto che $\hat{L}_{q'}(t) \in C^1[a,b]$. Otteniamo

$$\int_a^b \left[\hat{L}_q(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{q'}(t)\right] \eta'(t) dt + \hat{L}_{q'}(b)\eta(b) - \hat{L}_{q'}(a)\eta(a) = 0 \tag{5}$$

per ogni $\eta(t) \in D^1[a,b]$. In particolare la (5) vale per ogni $\eta(t) \in D^1[a,b]$ tale che $\eta(a) = 0, \eta(b) = 0$. In questo caso dal lemma fondamentale abbiamo

$$\hat{L}_q(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{q'}(t) = 0 \ . \tag{6}$$

Tenendo conto della (6), la (5) diviene

$$\hat{L}_{q'}(b)\eta(b) - \hat{L}_{q'}(a)\eta(a) = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b] \tag{7}$$

da cui segue subito la (4). Se ci limitiamo a supporre $L(t,q,q') \in C^1([a,b]\times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ e $\bar{q}(t) \in D^1[a,b]$ occorre utilizzare il lemma di Du Boys–Reymond. Definiamo

$$\Phi(t) = \int_a^b \hat{L}_q(\tau) d\tau \ .$$

Come nel teorema precedente otteniamo, tramite integrazione per parti,

$$(8) \qquad \int_a^b \left[-\Phi(t)\eta'(t) + \hat{L}_{q'}(t)\eta'(t) \right] dt + \Phi(b)\eta(b) = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b] \ .$$

In particolare, se nella (8) scegliamo $\eta(b) = 0$ $\eta(a) = 0$ otteniamo

$$(9) \ \int_a^b \left[-\Phi(t)\eta'(t) + \hat{L}_{q'}(t)\eta'(t) \right] dt = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b] \ \eta(b) = 0, \ \eta(a) = 0$$

e, per il lemma di Du Boys–Reymond, abbiamo

$$(10) \qquad -\Phi(t) + \hat{L}_{q'}(t) = \hat{L}_{q'}(a) \ .$$

Sostituendo in (8) concludiamo che

$$(11) \qquad \hat{L}_{q'}(a)\eta(b) - \hat{L}_{q'}(a)\eta(a) + \Phi(b)\eta(b) = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b] \ .$$

Scegliendo in (10) $\eta(b) = 0$ e $\eta(a) \neq 0$ otteniamo

$$(12) \qquad \hat{L}_{q'}(a) = 0 \ .$$

La (11) diviene allora $\Phi(b)\eta(b) = 0$ per ogni $\eta(t) \in D^1[a,b]$ per cui $\Phi(b) = 0$. D'altra parte dalla (10) e (12) segue $\Phi(b) = \hat{L}_{q'}(a)$. □

Esercizio. Dimostrare la seguente variante dei teoremi 1 e 2. Sia $L(t,q,q') \in C^1([a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ e $\bar{q}(t) \in D^1[a,b]$ tale che

$$J_1(\bar{q},\eta) = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b] \ \eta(a) = 0 \ .$$

Provare che

$$(13) \qquad \hat{L}_{q'}(t) = \int_a^t \hat{L}_q(\tau) d\tau + \hat{L}_{q'}(a)$$

$$\hat{L}_{q'}(b) = 0 \ . \tag{14}$$

Nota. Condizioni come le (4) si chiamano *condizioni naturali.*

Traiamo alcune importanti conclusioni dalla prima forma integrale dell'equazione di Eulero. Se una funzione $\bar{q}(t) \in D^1[a,b]$ soddisfa la

$$\hat{L}_{q'}(t) = \int_a^t \hat{L}_q(\tau) d\tau + \hat{L}_{q'}(a) \tag{15}$$

e $t = c$ è un punto di discontinuità per $\bar{q}'(t)$, vale a dire

$$p = \lim_{t \to c-} \bar{q}'(t) \neq \lim_{t \to c+} \bar{q}'(t) = r,$$

$t = c$ è un punto di discontinuità eliminabile per $\hat{L}_{q'}(t)$ che è quindi più regolare di $\bar{q}'(t)$. Questo fatto è immediata conseguenza della (15), poiché a membro destro abbiamo una funzione continua. Otteniamo in definitiva la prima equazione di Erdmann–Weierstrass

$$L_{q'}(c, \bar{q}(c), p) = L_{q'}(c, \bar{q}(c), r) \ . \tag{16}$$

Esempio. Per il funzionale

$$J(q) = \int_{-1}^{1} q'^2 (t - q)^2 dt$$

definito nella classe $A_1 = \{q(t) \in D^1[-1,1], q(-1) = 0, q(1) = 1\}$ la funzione $\bar{q}(t) = 0$ per $t \in [-1,0], \bar{q}(t) = t$ quando $t \in (0,1]$ fornisce il minimo assoluto di $J(q)$ in A_1. Per $t = 0$ la derivata prima di $\bar{q}(t)$ è discontinua, d'altra parte $\hat{L}_{q'}(t) = 0$ per ogni $t \in [-1,1] \backslash \{0\}$. La discontinuità di $\hat{L}_{q'}(t) = 0$ è quindi eliminabile.

Se $\bar{q}(t) \in C^1[a,b]$ abbiamo $\hat{L}_q(t) \in C^0[a,b]$. Per la (15) $\hat{L}_{q'}(t)$ è derivabile e vale

$$\frac{d}{dt} \hat{L}_{q'}(t) = \hat{L}_q(t) \ \text{ in } [a,b] \ . \tag{17}$$

Quando $\bar{q}(t)$ ha discontinuità nella derivata prima la (17) continua a valere negli intervalli di continuità di $\bar{q}'(t)$.

Nota. Può esistere $\frac{d}{dt}\hat{L}_{q'}(t)$ senza che esista $\bar{q}''(t)$, come mostra il funzionale

$$J(q) = \int_{-1}^{1} \bar{q}^{'2}(q - t^2)^2 dt$$

definito nella classe di funzioni $A_1 = \{q(t) \in D^1[-1,1], q(-1) = 0, q(1) = 1\}$. Infatti la funzione $\bar{q}(t) = 0$ per $t \in [-1,0]$, $\bar{q}(t) = t$ se $t \in (0,1]$ fornisce il minimo assoluto di $J(q)$ in A_1. Ora $\bar{q}''(0)$ non esiste, ma $\hat{L}_{q'}(t) = 0$ per ogni $t \in [-1,1] \backslash \{0\}$ ed è quindi, posto$\hat{L}_{q'}(0) = 0$, otteniamo una funzione derivabile.

Notiamo infine che se $\bar{q}(t) \in C^2[a,b]$ e $L \in C^2$ è possibile scrivere l'equazione (16) nella forma

(18). $$L_{q'q'}q'' + L_{q'q}q' + L_{q't} = L_q$$

Se poi $L_{q'q'} \neq 0$ è possibile ricavare la q'' dalla (17).

Esempio. i) Consideriamo il funzionale

$$J(y) = \int_{0}^{L} (y^{'2} + y^2) dx$$

nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0,L]; y(0) = y_0, y(L) = y_L\}$. L'equazione di Eulero è $y'' - y = 0$ il cui integrale generale è, come è noto, $y(x) c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.
Calcoliamo le costanti c_1 e c_2 tramite le condizioni $y(0) = y_0$, $y(L) = y_L$. Si trova facilmente che esiste per ogni $L > 0$ una e una sola soluzione $\bar{y}(x)$.

ii) Analogamente il funzionale si può pensare definito nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0,L]; y(0) = y_0\}$. In questo caso oltre alla condizione imposta abbiamo la condizione naturale $y'(L) = 0$. Si lascia come esercizio di provare che esiste una e una sola soluzione dell'equazione di Eulero che soddisfa la condizione imposta e quella naturale.

iii) Una terza possibile scelta è di considerare il funzionale $A_3 = D^1[0,L]$. In questo caso abbiamo due condizioni naturali $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. L'unica soluzione dell'equazione di Eulero che soddisfa queste due condizioni è la soluzione nulla.

iv) Provare che nei tre casi i), ii) e iii) gli estremali trovati sono minimi assoluti.

Osserviamo che questo modo di procedere può, per sua natura, fornire solo degli estremali $C^2[0,L]$, privi quindi di discontinuità nella derivata prima.

Esercizio. Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + e^x y)dx$$

nelle classi A_1, A_2 e A_3 dell'esempio precedente. Provare che in ciascuna di esse esiste uno ed un sol minimo assoluto. Trovarlo tale minimo.

Esercizio. Trovare gli estremali C^2 del funzionale

$$J(y) = \int_0^L (y'^2 + y^2 + f(x)y)dx$$

dove $f(x)$ è una arbitraria funzione continua (applicare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie). Provare che per ogni $L > 0$ esiste uno ed un solo minimo assoluto di $J(y)$ nelle classi A_1, A_2 e A_3 dell'esempio precedente.

9. Seconda forma integrale dell'equazione di Eulero

Teorema. Se $\bar{q}(t) \in D^1[a,b]$ è un minimo (massimo) relativo debole del funzionale

$$J(q) = \int_a^b L(t, q, q')dt$$

in una delle classi A_1, A_2, A_3 allora esiste una costante C tale da aversi

$$L(t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)) - \bar{q}'(t)L_{q'}(t, \bar{q}(t), \bar{q}'(t)) = \int_a^t L_t(\tau, \bar{q}(\tau), \bar{q}'(\tau))d\tau + C \tag{1}$$

per ogni $t \in [a,b]$, eccetto gli eventuali punti di discontinuità di $\bar{q}'(t)$.

Dim. Possiamo supporre che $J(q)$ minimizzi nella classe A_1. Infatti se $J(q)$ minimizza in A_2 o A_3, minimizza anche nella classe

$$A = \{q(t) \in D^1[a,b], q(a) = \bar{q}(a), q(b) = \bar{q}(b)\}$$

e quindi ci riduciamo al caso della classe A_1. Per la dimostrazione immergiamo $\bar{q}(t)$ in una famiglia a un parametro $\varphi(t,\epsilon)$ di funzioni ammissibili definita nel modo seguente. Sia $h(t) \in D^1[a,b]$ tale che $h(a) = h(b) = 0$ una funzione fissata. Consideriamo la famiglia di curve K_ϵ del piano (t,q) data parametricamente dalle equazioni

$$t = \tau + \epsilon h(\tau) \quad \tau \in [a,b] \tag{2}$$

$$(3) \qquad q = \bar{q}(\tau)\ .$$

Prendendo $|\epsilon| < \epsilon_0$ con ϵ_0 sufficientemente piccolo, le K_ϵ saranno dei grafici. Basta infatti scegliere ϵ_0 tale che $\epsilon_0 sup|h'(\tau)| = 1/2$ perché la (1) sia risolubile rispetto a τ nella forma

$$(4) \qquad \tau = F(t, \epsilon)\ .$$

Abbiamo $F(t, 0) = t, F(a, \epsilon) = a, F(b, \epsilon) = b$ per ogni $\epsilon(|\epsilon| < \epsilon_0)$ e inoltre

$$\frac{dF}{dt}(t, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon h'(F(t, \epsilon))}\ .$$

Le K_ϵ si possono esprimere come grafici nella forma

$$K_\epsilon : q = \varphi(t, \epsilon) = \bar{q}(F(t, \epsilon))\ .$$

Abbiamo $\varphi(t, 0) = \bar{q}(t), \varphi(a, \epsilon) = \bar{q}(a), \varphi(b, \epsilon) = \bar{q}(b)$ per cui $\varphi(t, \epsilon) \in A_1$. Inoltre

$$\frac{d\varphi}{dt}(t, \epsilon) = \frac{\bar{q}'(F(t, \epsilon))}{1 + \epsilon h'(F(t, \epsilon))}\ .$$

Definiamo la funzione

$$g(\epsilon) = J(\varphi(t.\epsilon)) = \int_a^b L(t, \varphi(t, \epsilon), \frac{d\varphi}{dt}(t, \epsilon))dt = \int_a^b L\Big(t, \bar{q}(F(t, \epsilon)), \frac{\bar{q}'(F(t, \epsilon))}{1 + \epsilon h'(F(t, \epsilon))}\Big)dt\ .$$

Con il cambiamento di variabile d'integrazione

$$t = \tau + \epsilon h(\tau) \quad \tau = F(t, \epsilon)$$

abbiamo

$$(5) \qquad g(\epsilon) = \int_a^b L\Big(\tau + \epsilon h(\tau), \bar{q}(\tau), \frac{\bar{q}'(\tau)}{1 + \epsilon h'(\tau)}(1 + \epsilon h'(\tau))\Big)d\tau\ .$$

Poiché $\bar{q}(t)$ è minimo relativo debole esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $q(t) \in N^1_\rho(\bar{q})$ vale $J(q) \geq J(\bar{q})$. Quindi esiste $0 < \epsilon_1 \epsilon_0$ tale che $\varphi(t, \epsilon) \in N^1_\rho(\bar{q})$ se $|\epsilon| \leq \epsilon_1$. Ne segue che

$\epsilon = 0$ é un minimo relativo per $g(\epsilon)$ e abbiamo $g'(0) = 0$. Derivando la (5) rispetto a ϵ otteniamo

$$\int_a^b [L(\tau, \bar{q}(\tau), \bar{q}'(\tau))h'(\tau) + L_t(\tau, \bar{q}(\tau), \bar{q}'(\tau))h(\tau) - L_{q'}(\tau, \bar{q}(\tau), \bar{q}'(\tau))q'(\tau)h'(\tau)]\, d\tau = 0\ .$$

Definiamo

$$\Phi(\tau) = \int_a^\tau L_t(\zeta, \bar{q}(\zeta), \bar{q}'(\zeta))d\zeta\ .$$

Otteniamo integrando per parti, cosa lecita poiché $\Phi(\tau) \in D^1[a,b]$,

$$\int_a^b [L(\tau, \bar{q}(\tau), \bar{q}'(\tau)) - L_{q'}(\tau, \bar{q}(\tau), \bar{q}'(\tau))q'(\tau) - \Phi(\tau)]\, h'(\tau)d\tau = 0 \tag{6}$$

per ogni $h(\tau) \in D^1[a,b], h(a) = h(b) = 0$. La tesi segue dal lemma di Du Boys–Reymond. $\square$

Come nel caso della prima forma integrale dell'equazione di Eulero la (1) ha interesse in sé.

10. Conseguenze della seconda forma integrale dell'equazione di Eulero

Se $t = c$ è un punto di discontinuità di $\bar{q}'(t)$, e vale la (1) abbiamo, posto $p = \bar{q}'(c+0)$ e $r = \bar{q}'(c-0)$,

$$L(c, \bar{q}(c), p) - pL_{q'}(c, \bar{q}(c), p) = L(c, \bar{q}(c), r) - rL_{q'}(c, \bar{q}(c), r)\ . \tag{1}$$

La (1) è la seconda equazione di Erdmann–Weierstrass ed è conseguenza immediata del fatto che nella (9.1) il membro destro è una funzione continua. Se $\bar{q}(t) \in C^1[a,b]$ e soddisfa la (9.1) abbiamo che $\hat{L}(t) - \bar{q}'(t)\hat{L}_{q'},(t)$ è una funzione derivabile e vale

$$\frac{d}{dt}(\hat{L}(t) - \bar{q}'(t)\hat{L}_{q'}(t)) = \hat{L}_t(t)\ . \tag{2}$$

Se infine $\bar{q}(t) \in C^2[a,b]$ e soddisfa la (9.1), mentre $L \in C^2$, possiamo sviluppare i calcoli nella (2); troviamo

$$L_t + L_q q' + L_{q'}q'' - q''L_{q'} - q'\frac{d}{dt}(L_{q'}) = L_t$$

per cui

$$(3) \qquad q'\left[L_q - \frac{d}{dt}(L_{q'})\right] = 0 \ .$$

Quindi se $q'(t) \neq 0, q(t)$ è soluzione dell'equazione di Eulero. Ne segue che tutte le soluzioni regolari della (8.13) sono anche soluzioni della (9.1), ma non viceversa: le constanti sono soluzioni di (9.1), ma non necessariamente di (8.13).
Conviene porre la seguente

Definizione. Data la lagrangiana $L(t, q, q') \in C^1([a, b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$, una funzione $\bar{q}(t) \in D^1[a, b]$ si dice *estremale spezzato* se soddisfa simultaneamente alla prima e seconda forma integrale dell'equazione di Eulero e cioè a (8.13) e (9.1).

In particolare, nei punti di discontinuità della derivata prima di un estremale spezzato sono verificate sia la prima che la seconda equazione di Erdmann–Weierstrass.

Definizione. Chiameremo *estremali* le soluzioni di classe C^1 dell'equazione di Eulero.

11. Regolarizzazione degli estremali

Si presenta come molto naturale il problema di dare delle condizioni sufficienti perché un estremale spezzato, a priori soltanto di classe D^1, sia di classe C^1 o addirittura di classe C^2. Utile a questo riguardo è il seguente

Lemma Se $\bar{q}(t)$ è un estremale spezzato e $t = c$ un punto di discontinuità di $\bar{q}'(t)$, la funzione $g(z) = L_{q'}(c, \bar{q}(c), z)$ assume almeno tre volte lo stesso valore.

Dim. Sia $p = \bar{q}'(c-0), r = \bar{q}'(c+0)$. Per ipotesi $p \neq r$. Dalle equazioni di Erdmann–Weierstrass otteniamo

$$(1) \qquad L_{q'}(c, \bar{q}(c), p) = L_{q'}(c, \bar{q}(c), r)$$

$$(2) \qquad L(c, \bar{q}(c), p) - L(c, \bar{q}(c), r) = (p - r)L_{q'}(c, \bar{q}(c), r) \ .$$

D'altra parte, per il teorema di Lagrange, abbiamo

$$(3) \qquad L(c, \bar{q}(c), p) - L(c, \bar{q}(c), r) = (p - r)L_{q'}(c, \bar{q}(c), \xi)$$

dove $\xi \neq p$, $\xi \neq r$. Dalle (2) e (3) per differenza otteniamo

$$(p-r)\,[L_{q'}(c,\bar{q}(c),r) - Lq'(c,\bar{q}(c),\xi)] = 0 \tag{4}$$

e poiché $p \neq r$, in definitiva, si ottiene

$$L_{q'}(c,\bar{q}(c),p) = L_{q'}(c,\bar{q}(c),r) = L_{q'}(c,\bar{q}(c),\xi)\ . \tag{5}$$

$\square$

Corollario. Se $L(t,q,q') \in C^2([a,b]\times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ e $t=c$ è punto di discontinuità per la derivata dell'estremale spezzato $q(t)$, la funzione di z : $L_{q'q'}(c,q(c),z)$ si annulla almeno due volte. È conseguenza immediata del lemma precedente e del teorema di Rolle.

In particolare se $L_{q'q'}(t,q,z) \neq 0$ per ogni $(t,q,z) \in [a,b]\times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ ogni estremale è di classe $C^1[a,b]$. Per esempio, tutti gli estremali dei funzionali

$$J(q) = \int_a^b \sqrt{1+q^2}{q'}^2 dt \qquad J(q) = \int_0^1 \sqrt{1+t+t^2}{q'}^2 dt$$

sono di classe C^1.

Esercizio. Esistono estremali spezzati del funzionale

$$J(y) = \int_0^1 e^{y^2}{y'}^3 dx \quad ?$$

Teorema (Regolarità C^2 degli estremali). Sia $L(t,q,q') \in C^2([a,b]\times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$, e $q(t) \in C^1[a,b]$ un estremale tale che

$$L_{q'q'}(t,q(t),q'(t)) \neq 0 \qquad \text{per ogni} \ \ t \in [a,b]\ . \tag{6}$$

In queste ipotesi $q(t) \in C^2[a,b]$.

Dim. Poiché $q(t)$ è un estremale, abbiamo

$$L_{q'}(t,q(t),q'(t)) = \int_a^t L_q(\tau,q(\tau),q'(\tau))d\tau + C\ . \tag{7}$$

Fissiamo $t_0 \in (a,b)$ e consideriamo la funzione

$$F(t,z) = L_{q'}(t, q(t), z) - \int_a^t L_q(\tau, q(\tau), q'(\tau))d\tau - C \ . \tag{8}$$

Se $z_0 = q'(t_0)$, abbiamo $F(t_0, z_0) = 0$. Poiché $F_z(t_0, z_0) = L_{q'q'}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) \neq 0$, possiamo applicare il teorema di Dini sulle funzioni implicite all'equazione $F(t,z) = 0$. Poiché $F(t,z) \in C^1$, esiste una e *una sola* funzione $z = \Psi(t)$ di classe C^1 definita localmente in un opportuno intorno $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che $z_0 = \Psi(t_0)$ e inoltre $F(t, \Psi(t)) = 0$ per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Poiché si ha anche $F(t, q'(t)) = 0$ concludiamo che $q'(t) = \Psi(t)$ per cui $q'(t) \in C^1$ e quindi $q(t) \in C^2$. Tenendo conto che t_0 è un punto arbitrario di (a,b) otteniamo la tesi. $\square$

Per induzione si prova poi che se $L(t,q,q') \in C^k([a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$, e $q(t) \in C^1[a,b]$ un estremale tale che $L_{q'q'}(t, q(t), q'(t)) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$ allora $q(t) \in C^k[a,b]$.

Si noti che applicando la formula che dà la derivata di $\Psi(t)$, e cioè

$$\Psi'(t_0) = -\frac{F_t(t_0, z_0)}{F_z(t_0, z_0)},$$

si trova la rappresentazione della

$$q''(t_0) = \frac{L_q(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - L_{qt}(t_0, q(t_0), q'(t_0)) - q'(t_0)L_{q'q}(t_0, q(t_0), q'(t_0))}{L_{q'q'}(t_0, q(t_0), q'(t_0))}$$

che coincide con quella che segue ricavando $q''(t)$ dalla $L_q - \frac{d}{dt}(L_{q'})$. Si noti che il teorema mostra che, se $L_{q'q'}(t, q(t), q'(t)) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$ e $q(t) \in C^1[a,b]$, la regolarità dell'estremale dipende solo dalla regolarità di $L(t,q,q')$.

Esempio. Consideriamo il funzionale

$$J(q) = \int_a^b (q^{'2} - 1)^2 dt$$

con $q(t) \in D^1[a,b]$ e $q(-1) = 1$, $q(1) = 1$. La funzione $\bar{q}(t) = |t|$ è un estremale spezzato nella classe indicata. Inoltre

$$L_{q'q'}(q') = 4(q^{'2} - 1) + 8q^{'2}.$$

Per cui $L_{q'q'}(\bar{q}'(t)) = 8$. D'altra parte $\bar{q}(t)$ non è di classe C^2. L'ipotesi che l'estremale sia di classe C^1 è essenziale.

12. Casi di integrabilità elementare dell'equazione di Eulero

Consideriamo i funzionale del tipo

$$J(q) = \int_a^b f(q')dt \tag{1}$$

dove $f(z) \in C^2(\mathbf{R}^1)$. Se si suppone

$$f''(z) \neq 0 \quad \text{per ogni} \quad z \in \mathbf{R} \tag{2}$$

ogni estremale è di classe $C^1[a,b]$ per il lemma precedente; d'altra parte, per il teorema gli estremali sono anche di classe $C^2[a,b]$. L'equazione di Eulero–Lagrange si scrive allora $f''(q')q'' = 0$, da cui segue $q'' = 0$. Gli estremali sono tutte e solo funzioni della forma $q(t) = mt + n$.
Se $f''(z) = 0$ ha una sola radice in $\mathbf{R}$ possiamo nuovamente escludere l'esistenza di estremali spezzati. Ogni estremale è $C^1[a,b]$. Se $q(t)$ è un estremale abbiamo per la prima forma integrale dell'equazione di Eulero

$$f(q'(t)) = C_1 \quad \text{per ogni} \quad t \in [a,b] \ ; \tag{3}$$

$q'(t)$ può essere solo una costante. Infatti se esistono due valori t_1 e $t_2 \in (a,b)$ $t_1 \neq t_2$ tali che $q'(t_1) \neq q'(t_2)$, $q'(t)$ assume tutti i valori compresi fra $q'(t_1), q'(t_2)$ per cui, in particolare, abbiamo $f'(q'(t_1)) = f(q'(t_2)) = f'(q'(t_3))$ e questo non può essere poiché $f''(z) = 0$ ha una sola radice.

Esempio. $L = q'^3 + q'^2 + q'$. Poiché $L_{q'q'} = 6q' + 2$ non vi sono estremali spezzati.

Esempio. $L = q'$. Ogni funzione appartenente alla classe $A_1 = \{q(t) \in D^1[a,b], q(a) = q_a, q(b) = q_b\}$ è estremale del funzionale $J(q) = \int_a^b q'dt$.

La figuratrice Per la ricerca degli estremali spezzati del funzionale della forma (1) è utile studiare il grafico della funzione $f(z), z \in \mathbf{R}$. Supponiamo che $q(t)$ sia un estremale spezzato e che $t = c$ sia un punto di discontinuità di $q'(t)$. Poniamo

$$p = q'(c+0) \neq q'(c-0) = r \ .$$

Per la prima equazione di Erdmann–Weierstrass abbiamo

$$f'(p) = f'(q) \ . \tag{4}$$

Il significato geometrico della (4) è evidente: nei punti $z = p$ e $z = r$ le tangenti al grafico della figuratrice $v = f(z)$ sono parallele. D'altra parte, la tangente al grafico della figuratrice in $z = p$ è data da

$$v = f'(p)(z - p) + f(p) \ . \tag{5}$$

Ora la retta (5) passa per il punto $(r, f(r))$, infatti la condizione $f(r) = f'(p)(r - p) + f(p)$ altro non è che la seconda equazione di Erdmann–Weierstrass. Quindi le tangenti alla figuratrice in $z = p$ e $z = r$ coincidono. Viceversa, se due tangenti alla figuratrice in punti distinti coincidono, il funzionale ha estremali spezzati.

Esempio. Consideriamo il funzionale

$$J(y) = \int_0^2 \left(18q'^2 - \frac{13}{4}q'^4 + \frac{1}{6}q'^6 \right) dt$$

nella classe $A_1 = \{q(t) \in D^1[0, 2]; q(0) = 0, q(2) = 0\}$. La figuratrice è la funzione $f(z) = 18z^2 - \frac{13}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^6$. Il grafico è quello della figura.

Abbiamo due classi di estremali spezzati: i) le spezzate di estremi (0,0) e (2,0) i cui lati hanno pendenza 2 e -2, ii) le spezzate di estremi (0,0) e (2,0) i cui lati hanno pendenza 3 e -3. Vi è inoltre l'estremale $q(t) = 0$ per $t \in [0, 2]$. Come subito si verifica, quest'ultimo estremale è un minimo assoluto.

Esercizio. Trovare gli estremali spezzati del funzionale

$$J(q) = \int_0^2 (q'^4 - 6q'^2) dt$$

nella classe $q(t) \in D^1[0,2], q(0) = 0, q(2) = 0$. Provare che si tratta di minimi assoluti.

2.**Funzionali della forma**

$$J(q) = \int_a^b f(t, q')dt \; . \tag{6}$$

Dalla prima forma integrale dell'equazione di Eulero abbiamo che lungo gli estremali spezzati e quelli regolari si ha

$$f_{q'}(t, q') = C_1 \; . \tag{7}$$

Nei casi in cui la (7) può essere risolta rispetto a q' può essere possibile ridurre il problema della ricerca degli estremali alle quadrature.

Esempio. Riprendiamo il funzionale di Weierstrass

$$J(y) = \int_{-1}^{1} x^2 {y'}^2 dx$$

nella classe $A_1 = \{y(x) \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$. Non vi sono estremali spezzati. Inoltre vale la (7) che si scrive $x^2 y' = C$. Otteniamo

$$y' = \frac{C}{x^2}$$

da cui segue $y(x) = -\frac{C}{x} + C_1$. Questa funzione appartiene alla classe A_1 solo se $C = 0$. È quindi impossibile soddisfare a entrambe le condizioni al bordo.

Esercizio. Trovare l'estremale del funzionale

$$J(y) = \int_2^3 (x^2 - 1){y'}^2 dx$$

che soddisfa le condizioni $y(2) = 0, y(3) = 1$. Provare che si tratta di un minimo assoluto.

3. Funzionali che non dipendono da x. Per i funzionali della forma

$$J(y) = \int_a^b f(y, y')dx \; . \tag{8}$$

vale l'integrale primo dell'energia

$$(9) \qquad f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') = C$$

Se la (9) è risolubile rispetto a y' può essere possibile trovare l'integrale generale dell'equazione di Eulero per separazione di variabili.

Esempio. Il problema della ricerca delle superfici di rotazione di area minima si traduce nella ricerca degli estremali del funzionale

$$J(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2)}dx$$

nella classe delle funzioni $y(x) \in D^1[a, b]$ tali che $y(a) = y_a, y(b) = y_b$. Dalla (9) otteniamo

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \alpha$$

con $\alpha \neq 0$. Per separazione di variabili troviamo l'integrale generale dell'equazione di Eulero del funzionale nella forma

$$y(x, \alpha, \beta) = \alpha \cos h \frac{x - \beta}{\alpha} \ .$$

Si tratta di una famiglia di catenarie. È importante notare che dati due punti $(a, y_a), (b, y_b)$ non sempre esiste un estremale che li congiunge. A titolo di esempio prendiamo $a = 0, y_a = 1$. Dalla condizione $y(0) = 1$ otteniamo, posto $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$,

$$y(x, \lambda) = \frac{\cos h(x \cos h\lambda - \lambda)}{\cos h\lambda} \ .$$

Imponendo l'altra condizione al bordo, e cioè $y(b, \lambda) = y_0$, si ha

$$y_b = \frac{\cos h(b \cos h\lambda - \lambda)}{\cos h\lambda} \geq \left| \frac{b \cos h\lambda - \lambda}{\cos h\lambda} \right| \geq |b| - \frac{|\lambda|}{\cos h\lambda} \ .$$

D'altra parte,

$$\frac{|\lambda|}{\cos h\lambda} \leq \frac{|\lambda_0|}{\cos h\lambda_0}$$

dove $\lambda_0 = 1.19968$. Quindi se scegliamo

$$y_b < |b| - \frac{|\lambda_0|}{\cos h\lambda_0}$$

non esiste alcun estremale che soddisfi entrambe le condizioni al bordo.

Esercizio. Trovare gli estremali del funzionale

$$J(y) = \int_0^1 e^y {y'}^2 dx$$

che soddisfano le condizioni $y(0) = 0$ e $y(1) = \log 4$.

4. Funzionali della forma

$$\int_a^b [M(x,y) + N(x,y)y']dx \ . \tag{10}$$

Supponiamo che le funzioni $M(x,y)$ e $N(x,y)$ siano di classe $C^1(S)$ nella striscia $S = \{(x,y); a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$. L'equazione di Eulero del funzionale è

$$N_x(x,y) = M_y(x,y) \ . \tag{11}$$

Nella (11) non intervengono derivate e sarà in generale impossibile trovare estremali che soddisfano condizioni agli estremi. Un caso particolarmente significativo si ha quando

$$N_x(x,y) = M_y(x,y) \ \text{ per ogni } \ (x,y) \in S \ . \tag{12}$$

Come è noto dall'analisi, la (12) garantisce l'esistenza di una funzione $U(x,y) \in C^2(S)$ tale che $M(x,y) = U_x(x,y), N(x,y) = U_y(x,y)$. Se il funzionale è definito nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[a,b]; y(x_a) = y_a, y(x_b) = y_b\}$ e vale la (12) abbiamo

$$J(y) = \int_a^b \frac{dU}{dx}(x, y(x))dx = U(b, y_b) - U(a, y_a) \ \text{ per ogni funzione di } \ A_1 \ .$$

Il funzionale è quindi costante in A_1 coerentemente con il fatto che l'equazione di Eulero è identicamente verificata.

Esempio. Il funzionale

$$J(y) = \int_a^b (y^2 + 2xyy')dx$$

rientra nella classe (10). La condizione (12) è verificata e $J(y)$ è quindi costante nella classe A_1.

Esercizio. Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^a y^{'3} dx$$

nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0, a]; y(0) = 0, y(a) = b\}$. Provare che: i) non vi sono estremali spezzati. ii) Il funzionale non ha né minimo né massimo assoluto. iii) Gli estremali sono minimi relativi deboli se $b > 0$ e massimi relativi deboli se $b < 0$.
iv) Se $b = 0$ l'estremale non è né massimo né minimo relativo debole.

Esercizio. Il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 y^{'2} dx + 2 \int_0^{1/2} y dx$$

non rientra in quelli studiati finora. Se definiamo la funzione $f(x) = 1$ se $0 \leq x < 1/2$ e $f(x) = 0$ se $1/2 < x \leq 1$, possiamo anche scrivere

$$J(y) = \int_0^1 (y^{'2} + 2f(x)y) dx$$

ma la lagrangiana $F(x, y, y') = y^{'2} + 2f(x)y$ non è di classe C^1. Provare che $J(y)$ ha minimo assoluto nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0, 1]; y(0) = 0, y(1) = 0\}$.

Esercizio. Definiamo la funzione $a(x) = 1$ se $-1 \leq x < 0$, $a(x) = 5$ se $0 \leq x < 1$. Consideriamo il funzionale

$$J(y) = \int_{-1}^1 a(x) y^{'2} dx = \int_{-1}^0 y^{'2} dx + \int_0^1 5y^{'2} dx \ .$$

La lagrangiana $F(x, y, y') = a(x)y^{'2}$ non è di classe C^1. Provare che il funzionale ha minimo assoluto nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[-1, 1]; y(-1) = 1, y(1) = 3\}$.

13. Il caso vettoriale

Per le lagrangiane della forma $L(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}) \in C^1([a, b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ dove $\mathbf{q}$ e $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$, la condizione necessaria di Eulero–Lagrange si ricava in modo simile al caso scalare. Consideriamo, per esempio, il funzionale

(1) $$J(\mathbf{q}) = \int_a^b L(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) dt$$

nella classe $A_1 = \{\mathbf{q}(t) \in D^1[a,b], q(a) = q_a, q(b) = q_b\}$ e, per fissare le idee, supponiamo che $\bar{\mathbf{q}}(t) \in A_1$ sia il minimo assoluto del funzionale nella classe indicata. Immergiamo $\bar{\mathbf{q}}(t)$ nella famiglia di funzioni ammissibili

$$\bar{\mathbf{q}}(t) + \epsilon\eta(t) \in A_1$$

dove $\eta(t) \in D^1[a,b]$ e inoltre $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Posto $g(\epsilon) = J(\bar{\mathbf{q}} + \epsilon\eta)$ definiamo la variazione prima del funzionale

$$J_1(\bar{\mathbf{q}}, \eta) = g'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\hat{L}_{q_i}(t)\eta_i(t) + \hat{L}_{q_i'}(t)\eta_i'(t)\right] dt \tag{2}$$

dove $\hat{L}_{q_i}(t) = L_{q_i}(t, \mathbf{q}_i(t), \mathbf{q}_i'(t)), \hat{L}_{q_i'}(t) = \hat{L}_{q_i'}(t, \mathbf{q}_i(t), \mathbf{q}_i'(t))$. Poiché $\bar{\mathbf{q}}(t)$ è il minimo assoluto abbiamo

$$J_1(\bar{\mathbf{q}}, \eta) = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b] \ \text{ tale che } \ \eta(a) = \eta(b) = 0 \ . \tag{3}$$

Scegliamo $\eta_i(t) = 0$ quando $i \neq j$, e poniamo

$$\Phi_j(t) = \int_a^t \hat{L}_{q_i}(t)dt \ .$$

La (3) diviene

$$\int_a^b \left[\hat{L}_{q_i'}(t) - \Phi_j(t)\right] \eta_j'(t)dt = 0 \ \text{ per ogni } \ \eta(t) \in D^1[a,b], \eta_j(a) = \eta_j(b) = 0 \ . \tag{4}$$

Dalla (4) seguono le equazioni di Eulero–Lagrange in forma integrale

$$\hat{L}_{q_i'}(t) = \int_a^t \hat{L}_{q_i}(\tau)d\tau + C_j \quad j = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{5}$$

Sussiste anche l'analogo vettoriale della condizione necessaria (#) e cioè il

Teorema. Se $L(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}) \in C^1([a,b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ e $\bar{\mathbf{q}}(t)$ è minimo assoluto del funzionale $J(\mathbf{q})$ vale

$$\hat{L}(t) - \sum_{i=1}^n \bar{q}_i'(t)\hat{L}_{q_i'}(t) = \int_a^t \hat{L}_{q_i'}(\tau)d\tau + C \ . \tag{6}$$

Come nel caso scalare, le condizioni (5) hanno interesse in sé e ciò a prescindere dal fatto che $\bar{\mathbf{q}}(t)$ sia minimo assoluto.

Definizione. Chiameremo estremale spezzato una funzione $\bar{\mathbf{q}}(t) \in D^1[a,b]$ con discontinuità nella derivata prima e che soddisfa le (5) e (6).

In un punto di discontinuità $t = c$ della derivata prima $\bar{\mathbf{q}}'(t)$ di un estremale spezzato $\bar{\mathbf{q}}(t)$ valgono le equazioni di Erdmann–Weierstrass

$$L_{q_i'}(c, \bar{\mathbf{q}}(c), \bar{\mathbf{q}}'(c+0)) = \hat{L}_{q_i'}(c, \bar{\mathbf{q}}(c), \bar{\mathbf{q}}'(c-0)) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$L(c, \bar{\mathbf{q}}(c), \bar{\mathbf{q}}'(c+0)) - \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i'(c+0) L_{q_i'}(c, \bar{\mathbf{q}}(c), \bar{\mathbf{q}}'(c+0)) =$$

$$L(c, \bar{\mathbf{q}}(c), \bar{\mathbf{q}}'(c-0)) - \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i'(c-0) L_{q_i'}(c, \bar{\mathbf{q}}(c), \bar{\mathbf{q}}'(c-0)) \ .$$

Se una soluzione delle (5) è di classe $C^1[a,b]$ dalle (5) segue

$$\frac{d}{dt} L_{q_i'} = L_{q_i} \ . \tag{7}$$

Chiameremo *estremali* le soluzioni di classe $C^1[a,b]$ delle equazioni (7). Se poi $\bar{\mathbf{q}}(t)$ è di classe $C^2[a,b]$ e inoltre $L(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}) \in C^2([a,b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, possiamo sviluppare i calcoli nella (7), che si scrivono nella forma

$$\sum_{k=1}^{n} L_{q_i' q_k'} q_{k''} = G_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}') \quad i = 1, 2, \dots, n \ . \tag{8}$$

Se $\mathbf{q}(t)$ è una soluzione delle (8) e inoltre per ogni $t \in [a,b]$ vale

$$\det \left[L_{q_i' q_k'}(t, \mathbf{q}(t) \mathbf{q}'(t)) \right] \neq 0 \ , \tag{9}$$

è possibile ricavare le $q_{k''}$ dalle (8). Viceversa vale il seguente risultato di esistenza della derivata seconda e delle derivate superiori:

Teorema. Supponiamo che

$$L(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}) \in C^m([a,b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \quad m \geq 2 \tag{10}$$

$$\mathbf{q}(t) \in C^1[a,b] \tag{11}$$

$$\mathbf{q}(t) \ \text{ soddisfa } \ \hat{L}_{q_i'}(t) = \int_a^t \hat{L}_{q_i}(\tau) d\tau + C_j \quad j = 1, 2, \dots, n \ . \tag{12}$$

(13) $$\det\left[L_{q'_i q'_k}(t,\mathbf{q}(t)\mathbf{q}'(t))\right]\neq 0\ .$$

In queste ipotesi $\mathbf{q}(t)$ è di classe $C^m[a,b]$.

La dimostrazione è simile a quella del caso $n=1$ e la si lascia come esercizio.

Esempio. $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$ sono le equazioni di una carta locale di una superficie di $\mathbf{R}^3$ e P_0, P_1 due punti della superficie corrispondenti ai valori $(u_0,v_0),(u_1,v_1)$. Specifichiamo sulla superficie una curva congiungente i punti P_0 e P_1 tramite le $u=u(t), v=v(t)$ soddisfacenti alle condizioni $u(t_0)=u_0$, $v(t_0)=v_0, u(t_1)=u_1, v(t_1)=v_1$. La lunghezza di questa curva è data dal funzionale

$$J(u,v)=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv^2dt}$$

dove $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$, $f=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$, $E=x_v^2+y_v^2+z_v^2$ sono i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale. Le soluzioni delle equazioni di Eulero relative al funzionale $J(u,v)$ sono le curve geodetiche della superficie.

Nota. Evidentemente il funzionale (1) può essere definito anche in altre classi di funzioni in cui solo alcune delle componenti di $\mathbf{q}(t)$ sono prefissate per $t=a$ e per $t=b$. Il consueto procedimento euleriano permette anche in questo caso di trovare le condizioni naturali che vanno aggiunte alle condizioni imposte a priori.

14. Funzionali dipendenti da derivate di ordine superiore

Sia $f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\in C^{n+1}([a,b]\times\mathbf{R}^{n+1})$ e consideriamo il funzionale

(1) $$J(y)=\int_a^b f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})dx$$

che, per fissare le idee, supponiamo definito nella classe

$$A=\{y(x)\in D^n[a,b], y(a)=y_a, y'(a)=y'_a,\ldots,y^{(n-1)}(a)=y_a^{(n-1)}\ ,$$

$$y(b)=y_b, y'(b)=y'_b,\ldots y^{(n-1)}(b)=y_b^{(n-1)}\}\ .$$

Sia $\bar{y}(x)\in C^{2n}[a,b]$ il minimo assoluto di $J(y)$ in A che immergiamo nella famiglia di funzioni ammissibili $\bar{y}(x)+\epsilon\eta(x)$ dove $\eta(x)\in D^n[a,b]$ e verifica $\eta(a)=\eta'(a)=$

$\ldots\eta^{n-1}(a) = 0, \eta(b) = \eta'(b) = \ldots\eta^{n-1}(b) = 0$. Posto, come al solito, $g(\epsilon) = J(\bar{y} + \epsilon\eta)$, abbiamo $g'(0) = 0$, condizione che si scrive

$$(2) \qquad \int_a^b \left[\hat{f}_y(x)\eta(x) + \hat{f}_{y'}(x)\eta'(x) + \ldots + \hat{f}_{y^{(n)}}(x)\eta^{(n)}(x)\right] dx = 0$$

per tutte le funzioni $\eta(x) \in D^n[a,b]$ tali che $\eta(a) = \eta'(a) = \ldots\eta^{n-1}(a) = 0$, $\eta(b) = \eta'(b) = \ldots\eta^{n-1}(b) = 0$.

Nella (2) abbiamo posto

$$\hat{f}_y(x) = f_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \ldots, \bar{y}^{(n)}(x)) \quad \text{ecc.}$$

L'ipotesi $\bar{y}(x) \in C^{2n}[a,b]$ permette di integrare per parti nella (2) scaricando successivamente le derivate di $\eta(t)$. Poiché tutti i termini di frontiera sono nulli, otteniamo

$$(4) \qquad \int_a^b \left[\hat{f}_y - \frac{d}{dx}(\hat{f}_{y'}(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(\hat{f}_{y''}(x)) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(\hat{f}_{y^{(n)}}(x))\right] \eta dx = 0$$

per tutte le η specificate in precedenza. Dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni otteniamo la condizione necessaria di Eulero per questo tipo di problema e cioè:

$$(5) \qquad f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(f_{y''}) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(f_{y^{(n)}}) = 0 \ .$$

Per classi di funzioni ammissibili in cui i valori di y, $y', \ldots, y^{(n-1)}$ in $x = a$ e $x = b$ siano imposti solo parzialmente, procedendo in modo simile si ottiene ancora la (5) come condizione necessaria e inoltre varie condizioni naturali che si calcolano dall'analisi dei termini di frontiera non nulli che si generano nelle successive integrazioni per parti.
È anche possibile, a prezzo di qualche complicazione formale, evitare l'ipotesi $\bar{y}(x) \in C^{2n}[a,b]$, supporre semplicemente $\bar{y}(x) \in A$ e procedere come nel caso $n = 1$.

Esercizio Calcolare l'equazione di Eulero e le condizioni naturali del funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 + 2xy)dx$$

definito in $A = \{y(x) \in C^2[0,1],\ y(0) = 1, y'(0) = 2\}$. Trovare la soluzione dell'equazione di Eulero che soddisfa le condizioni naturali e quelle imposte. Provare che si tratta di un minimo assoluto.

Esempio. Consideriamo un'asta elastica unidimensionale rettilinea e di lunghezza L (quando non soggetta a carichi) che può deformarsi solo in un piano verticale $0xy$ (l'asse y è vertica ascendente). Supponiamo che l'asta, uniforme e di densità ρ, sia soggetta solo al proprio peso. Indichiamo con $y(x)$ la deflessione della sbarra in equilibrio. Ci proponiamo di determinare questa configurazione di equilibrio come minimo del funzionale dell'energia dell'asta, somma dell'energia potenziale elastica e dell'energia potenziale gravitazionale. L'energia potenziale elastica è proporzionale all'integrale sulla lunghezza del quadrato della curvatura che approssimiamo con la derivata seconda. Tenendo conto che l'energia potenziale gravitazionale è data da

$$\int_0^L \rho g y(x) dx$$

otteniamo, per il funzionale dell'energia, l'espressione

$$J(y) = \int_0^L \frac{\mu}{2} y''^2(x) + \rho g y(x) dx \qquad \mu > 0. \tag{6}$$

L'equazione di Eulero del funzionale è

$$y^{IV} + \frac{\rho g}{\mu} = 0 \ . \tag{7}$$

Se la sbarra è incastrata in entrambi gli estremi imporremo le condizioni:

$$y(0) = y_0, \quad y(L) = y_L, \quad y'(0) = y'_0, \quad y'(L) = y'_L \ . \tag{8}$$

Risolvendo la (7) con le condizioni (8) si trova la configurazione d'equilibrio. Si lascia come esercizio di provare che si tratta di un minimo assoluto del funzionale (6) nella classe (8).
È fisicamente chiaro che sono possibili anche altre condizioni al bordo: la sbarra può essere incastrata per $x = 0$, il che comporta le condizioni

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \ , \tag{9}$$

e semplicemente appoggiata per $x = L$, vale a dire

$$y(L) = y_L \ . \tag{10}$$

Con le tre condizioni (9) e (10) la soluzione di (7) è indeterminata. Cerchiamo la condizione naturale corrispondente alla classe di funzioni ammissibili determinata dalle (9) e (10). Per restare nella classe delle funzioni ammissibili consideriamo variazioni della forma

$$y(x) + \epsilon\eta(x) \ ,$$

dove $\eta(x) \in D^2[0, L]$ e inoltre $\eta(0) = 0, \eta'(0) = 0, \eta(L) = 0$. Derivando la funzione $g(\epsilon) = J(y + \epsilon\eta)$ e procedendo nel modo solito, troviamo la condizione naturale

$$y''(L) = 0 \ . \tag{11}$$

Trovare, per esercizio, la soluzione di (7) determinata dalle condizioni (9), (10) e (11).

Esercizio. Trovare la configurazione di equilibrio di una sbarra omogenea quando la sbarra è incastrata in $x = 0$ e libera in $x = L$.

15. Condizione necessaria per il problema isoperimetrico

Le funzioni $f(x, y, y')$ $g(x, y, y')$ appartengono entrambe alla classe $C^1([a, b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$. Consideriamo i funzionali

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \tag{1}$$

$$I(y) = \int_a^b g(x, y, y')dx \ . \tag{2}$$

Il funzionale $J(y)$ si suppone definito nella classe

$$A = \{y(x) \in D^1[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b, I(y) = L\} \ .$$

Problemi di questo tipo si chiamano isoperimetrici. Esempio tipico è il problema di Didone visto a pagina 4.

Teorema. Se $y = \varphi(x) \in A$ è un minimo relativo debole, per il funzionale $J(y)$ nella classe A esistono due numeri λ_0 e λ_1 non entrambi nulli per cui $y = \varphi(x)$ annulla la variazione prima del funzionale ausiliario

$$H(y) = \lambda_0 J(y) + \lambda_1 I(y)$$

nella classe $B = \{y(x) \in D^1[a,b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$ che non contiene il vincolo integrale. Si ha cioè

$$H_1(\varphi, h) = \lambda_0 J_1(\varphi, h) + \lambda_1 I_1(\varphi, h) \tag{3}$$

per ogni $h(x) \in D^1[a,b]$ tale che $h(a) = 0, h(b) = 0$.

Dim. Se vale

$$I_1(\varphi, h) = 0 \quad \text{per ogni} \quad h(x) \in D^1[a,b] \quad \text{tale che} \quad h(a) = 0, h(b) = 0 \tag{4}$$

e cioè se $\varphi(x)$ è un estremale del funzionale $I(y)$, possiamo prendere $\lambda_0 = 0$ e λ_1 non nullo e arbitrario e il teorema è dimostrato. Supponiamo, viceversa, che esista una funzione $\hat{h}(x) \in D^1[a,b]$ con $\hat{h}(a) = \hat{h}(b) = 0$ e inoltre

$$I_1(\varphi, \hat{h}) \neq 0. \tag{5}$$

Consideriamo poi una arbitraria funzione $h(x) \in D^1[a,b]$ tale che $h(a) = 0, h(b) = 0$. Definiamo la funzione $\Phi(\alpha, \beta) \in C^1(\mathbf{R}^2)$ nel modo che segue

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_a^b g(x, \varphi + \alpha h + \beta \hat{h}, \varphi' + \alpha h' + \beta \hat{h}')dx - L \ .$$

Abbiamo $\Phi(0,0) = \int_a^b g(x, \varphi, \varphi')dx - L = 0$ poiché $\varphi \in A$. Inoltre $\Phi_\beta(0,0) = I_1(\varphi, \hat{h}) \neq 0$. Per il teorema delle funzioni implicite è possibile risolvere l'equazione $\Phi(\alpha, \beta) = 0$ rispetto a β e trovare una funzione $\beta = \beta(\alpha)$ di classe $C^1(-\delta, \delta)$ tale che $\beta(0) = 0$ e $\Phi(\alpha, \beta(\alpha)) = 0$ e inoltre

$$\beta'(0) = -\frac{\Phi_\alpha(0,0)}{\Phi_\beta(0,0)} = -\frac{I_1(\varphi, h)}{I_1(\varphi, \hat{h})} \ . \tag{6}$$

Immergiamo $\varphi(x)$ nella famiglia di funzioni $\varphi(x) + \alpha h(x) + \beta(\alpha)\hat{h}(x)$. Per la scelta di $\beta(\alpha)$ abbiamo $\varphi(x) + \alpha h(x) + \beta(\alpha)\hat{h}(x) \in A$, tenendo anche conto del fatto che

$$\varphi(x) + \alpha h(x) + \beta(\alpha)\hat{h}(a) = y_a \quad \varphi(b) + \alpha h(b) + \beta(\alpha)\hat{h}(b) = y_b$$

Sia $\rho > 0$ la costante che interviene nella definizione di minimo relativo debole. Poiché $\beta(\alpha)$ è una funzione continua, esiste $\alpha_1 > 0$ tale che

$$|\alpha h(x) + \beta(\alpha)\hat{h}(x)| < \rho \quad |\alpha h'(x) + \beta(\alpha)\hat{h}'(x)| < \rho \ \text{ quando } \ |\alpha| < \alpha_1$$

per cui $\varphi(x)+\alpha h(x)+\beta(\alpha)\hat{h}(x) \in N_\rho^{(1)}(\varphi)$. Ne segue che, posto $g(\alpha)=J(\varphi+\alpha h+\beta(\alpha)\hat{h})$, si ha

$$g'(0)=J_1(\varphi,h)+\beta'(0)J_1(\varphi,\hat{h})=0 \ .$$

Tenendo conto delle (6) otteniamo

$$I_1(\varphi,\hat{h})J_1(\varphi,h)-J_1(\varphi,\hat{h})I_1(\varphi,h)=0 \tag{7}$$

per ogni $h(x) \in D^1[a,b]$ tale che $h(a)=0, h(b)=0$. Segue la tesi con $\lambda_0 = I_1(\varphi,\hat{h}), \lambda_1=-J_1(\varphi,\hat{h})$. □

Il teorema fornisce un algoritmo per trovare gli estremali del problema isoperimetrico.

Esempio. Consideriamo il funzionale

$$J(y)=\int_0^1 y'^2 dx$$

nella classe

$$A=\left\{y(x)\in D^1[0,1], y(0)=1, y(1)=6, \int_0^1 y(x)dx=3\right\} \ .$$

Il funzionale ausiliario di cui occorre cercare gli estremali è

$$H(y)=\int_0^1 (y'^2+\lambda y)dx \ .$$

Si trova

$$y(x)=\frac{\lambda}{4}x^2+c_1x+c_2 \ .$$

Le costanti λ, c_1 e c_2 si calcolano imponendo le condizioni

$$y(0)=1, y(1)=6, \int_0^1 y(x)dx=3 \ .$$

Si trova $y(x)=3x^2+2x+1$. Come già sappiamo si tratta di un minimo assoluto.

Esempio. Nel caso del problema di Didone dobbiamo cercare il massimo del funzionale

$$J(y)=\int_{-a}^{a} y(x)dx$$

con le condizioni

$$y(-a) = 0, y(a) = 0, I(y) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2} dx = L \ .$$

Consideriamo il funzionale

$$H(y) = \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx \ .$$

Scrivendo l'equazione di Eulero e integrando una volta, troviamo

$$y'^2 = \frac{(x + c_1)^2}{[\lambda^2 - (x + c_1)^2]} \ .$$

Integrando nuovamente otteniamo

$$y(x) = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x + c_1)^2} + c_2 \ .$$

Dalle condizioni $y(-a) = 0, y(a) = 0$ segue

$$\left(y + \sqrt{\lambda^2 - a^2} \right)^2 + x^2 = \lambda^2 \ .$$

Si tratta di cerchi di raggio $|\lambda|$ e centro $\left(0, -\sqrt{\lambda^2 - a^2}\right)$. Calcoliamo λ con la condizione

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2} dx = L \ .$$

Si trova l'equazione

$$\arcsin \frac{a}{\lambda} = \frac{L}{2\lambda}$$

per cui se $0 < L < 2a$ non vi è nessuna soluzione, se $2a < L < a\pi$ abbiamo due soluzioni; per $L = a\pi$ gli estremali sono i semicerchi $y(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, mentre quando $L > a\pi$ non vi sono estremali. Si noti che questo procedimento non fornisce alcuna informazione sulla natura degli estremali trovati, anche se è intuitivamente chiaro che si tratta di un minimo e di un massimo assoluto.

16. Un importante funzionale speciale

Consideriamo il funzionale

$$J(y) = \int_0^L (y'^2 - y^2) dx \quad L > 0 \tag{1}$$

nella classe delle funzioni ammissibili

$$A_1 = \{y(x) \in D^1[0,L],\ y(0) = 0,\ y(L) = 0\}\ .$$

È subito visto che non vi sono estremali spezzati. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione di Eulero

$$y'' + y = 0 \tag{2}$$

che soddisfano le condizioni al bordo. L'integrale generale dell'equazione di Eulero è

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

per cui occorre risolvere il sistema

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin L + C_2 \cos L = 0 \tag{3}$$

che ha una sola soluzione quando $L \neq k\pi$ $k = 1, 2, 3, \ldots$, mentre quando $L = k\pi$ ha infinite soluzioni. Quindi nel primo caso vi è solo l'estremale $\bar{y}(x) = 0$, mentre nel secondo vi sono infiniti estremali dati da $\bar{y}(x) = C \sin x$ con C una costante arbitraria. Supponiamo che $0 < L < \pi$ e mostriamo che $\bar{y}(x) = 0$ fornisce il minimo assoluto. Consideriamo la funzione

$$w(x) = \operatorname{cotan}\left(x + \frac{\pi - L}{2}\right)$$

che nell'intervallo $[0, L]$ è di classe C^1. Se $y(x)$ è una generica funzione ammissibile abbiamo, poiché $y(0) = y(L) = 0$,

$$\int_0^L (y^2 w)' dx = 0\ .$$

Quindi per ogni funzione $y(x) \in A_1$ otteniamo

$$J(y) = \int_0^L \left[y'^2 - y^2 - (y^2 w)'\right] dx = \int_0^L (y' - yw)^2 dx \geq 0\ . \tag{4}$$

Ne segue che $\bar{y}(x) = 0$ è minimo assoluto del funzionale nella classe indicata. Il caso in cui $L = \pi$ richiede qualche osservazione ulteriore. Come sappiamo, in questo caso vi sono infiniti estremali dati da $\bar{y}(x) = C \sin x$. Proviamo che si tratta di minimi assoluti. Sia $w(x) = \operatorname{cotan} x$, $x \in [0, \pi]$ e $y(x)$ una generica funzione di A_1. Tenendo conto che il limite di $y'(x)$ per $x \to 0-$ e per $x \to \pi+$ esiste finito abbiamo, applicando la regola dell'Hospital,

$$\lim_{x\to 0-} y^2(x)w(x) = 0 \qquad \lim_{x\to \pi+} y^2(x)w(x) = 0$$

mentre sono finiti i limiti

$$\lim_{x\to 0-} (y^2(x)w(x))' \qquad \lim_{x\to \pi+} (y^2(x)w(x))' \ .$$

Otteniamo $y^2 w \in D^1[0,\pi]$, per cui

$$\int_0^\pi (y^2 w)' dx = 0 \ .$$

La (4) è quindi ancora valida. Tenendo conto che

$$J(\bar{y}) = C^2 \int_0^\pi (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = 0$$

concludiamo che tutti gli estremali sono minimi assoluti. Se $L > \pi$ nessuno degli estremali è minimo assoluto. Infatti se $\bar{y}(x)$ è uno qualsiasi di questi estremali abbiamo comunque $J(\bar{y}) = 0$. Consideriamo la funzione $y_\epsilon(x) = \epsilon \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ che appartiene alla classe delle ammissibili. Ora

$$J(y_\epsilon) = \frac{\epsilon^2(\pi^2 - L^2)}{2L} < 0$$

quindi $\bar{y}(x)$ non può essere minimo assoluto (e neppure minimo relatico debole).

Esercizio. Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^\pi \left[y'^2 - y^2 - (e^x + 2e^{-x})y \right] dx$$

è privo di minimo assoluto nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0,\pi], y(0) = 0, y(\pi) = 0\}$.

Esercizio. Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^\pi \left[y'^2 - y^2 - 2y\cos x \right] dx$$

ha infiniti minimi assoluti nella classe $A_1 = \{y(x) \in D^1[0,\pi], y(0) = 0, y(\pi) = 0\}$ e trovarli.

Esercizio. Provare che per ogni funzione $y(x)$ appartenente a $D^1[a,b]$ tale che $y(a) = 0, \qquad y(b) = 0$ vale

$$\int_a^b y^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b y^{'2} dx \ .$$

Esercizio. Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^L (y^{'2} - y^2) dx$$

nella classe di funzioni $A = \{y(x) \in D^1[0,L]; y(0) = 0\}$. Provare che se $0 < L < \pi/2$ vi è solo il minimo assoluto $\bar{y}(x) = 0$, mentre se $L = \pi/2$ vi sono infiniti minimi assoluti dati da $\bar{y}(x) = C \sin x$.

17. Una dimostrazione della diseguaglianza isoperimetrica piana

Consideriamo ora il funzionale

$$J(y) = \int_0^{2\pi} (y^{'2} - y^2) dx$$

nella classe $A = \{y(x) \in D^1(\mathbf{R}); y(a + 2\pi) = y(x)$ per ogni x, $\int_0^{2\pi} y(x) dx = 0\}$. Proviamo che per ogni $y(x) \in A$ si ha

$$\int_0^{2\pi} (y^{'2} - y^2) dx \geq 0 \ . \tag{1}$$

Sia $y(x)$ una qualsiasi delle ammissibili. Definiamo la funzione $z(x) = y(x+\pi) - y(x)$. Abbiamo $z(x+\pi) = -z(x)$, per cui in particolare se $z(0) \geq 0$ vale $z(\pi) \leq 0$, mentre se $z(0) \leq 0$ vale $z(\pi) \geq 0$; esiste quindi un numero $\alpha \in [0,\pi]$ tale che $z(\alpha) = 0$ e cioè $y(\alpha + \pi) = y(\alpha)$. Consideriamo la funzione

$$w(x) = (y(x) - a)^2 \text{cotan}\,(x - \alpha) \quad x \in [0, 2\pi] \quad y(\alpha) = a$$

$w(x)$ è definita se $x \neq \alpha$ e $x \neq \alpha + \pi$, d'altra parte si ha

$$\lim_{x \to \alpha} w(x) = \lim_{x \to \alpha + \pi} w(x) = 0 \ .$$

Esistono inoltre finiti i limiti

$$\lim_{x \to \alpha +} w'(x), \qquad \lim_{x \to (\alpha + \pi) +} w(x)$$

$$\lim_{x\to\alpha-} w'(x), \qquad \lim_{x\to(\alpha+\pi)-} w'(x) \ .$$

Possiamo quindi estendere la $w(x)$ ponendola uguale a zero per $x=\alpha$ e per $x=\alpha+\pi$. Otteniamo in questo modo una funzione di classe $D^1[0,2\pi]$. Poiché $w(0)=w(2\pi)$ abbiamo, con facile calcolo,

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^{2\pi} w'(x)dx &= \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx + 2a\int_0^{2\pi} ydx - 2\pi a^2 \\ &- \int_0^{2\pi} [y' - (y-a)\mathrm{cotan}(x-\alpha)]^2 dx \end{aligned}$$

da cui ricaviamo, tenendo conto che la media di $y(x)$ è nulla,

$$\int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx = 2\pi a^2 + \int_0^{2\pi} [y' - (y-a)\mathrm{cotan}(x-\alpha)]^2 dx \geq 0 \ .$$

La (1) permette di dimostrare i seguente

Teorema. Se C è una curva piana, semplice, chiusa, regolare di lunghezza L e se A è l'area della regione piana contenuta nella curva, si ha

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \ .$$

Dim. Sia $x=x_1(s), y=y_1(s), s\in[0,L]$ la rappresentazione parametrica di C in funzione dell'arco. Come è noto abbiamo

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 = 1 \ .$$

Definiamo il cambiamento di parametro $s=\frac{L\varphi}{2\pi}$ e poniamo $x=x(\varphi), y=y(\varphi)$. Evidentemente abbiamo

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \ .$$

Come è noto dall'analisi, se la curva C è percorsa in verso antiorario vale la formula

$$A = -\int_c ydx \ .$$

Osserviamo che non è restrittivo supporre

(2) $$\int_0^{2\pi} y(\varphi)d\varphi = 0 \ .$$

Infatti se $\int_0^{2\pi} y(\varphi)d\varphi \neq 0$ possiamo definire $\tilde{y}(\varphi) = y(x) - \frac{k}{2\pi}$ rendendo soddisfatta la (2). Ma questo equivale a una traslazione lungo l'asse y che evidentemente lascia invariate aree e lunghezze. Abbiamo

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2A = \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2)d\varphi + 2\int_0^{2\pi} yx'd\varphi = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)d\varphi + \int_0^{2\pi} (x' + y)^2 d\varphi \geq 0 \; .$$

□

18. Il problema di Bolza

Consideriamo le funzioni $f(x, y, y') \in C^1([a, b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}), g(y_a, y_b) \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ e il funzionale

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx + g(y(a), y(b)) \tag{1}$$

nella classe $D^1[a, b]$. Questo tipo di problema si chiama anche problema di Bolza. Con il solito metodo euleriano si trova che se $\tilde{y}(x) \in C^1[a, b]$ è un minimo locale per (1) in $D^1[a, b]$ vale l'equazione di Eulero

$$-\frac{d}{dt} f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + f_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = 0 \tag{2}$$

e le condizioni di trasversalità

$$f_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a)) = g_{y_a}(\bar{y}(a), \bar{y}'(a)) \tag{3}$$

$$f_{y'}(b, \bar{y}(b), \bar{y}'(b)) = -g_{y_b}(\bar{y}(b), \bar{y}'(b)) \; . \tag{4}$$

La dimostrazione di questo risultato si lascia per esercizio.

Esempio. Cerchiamo gli estremali del funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2)dx - 2y(1)\sin h(1)$$

nella classe $D^1[0, 1]$. Occorre trovare la soluzione dell'equazione $y'' - y = 0$ che soddisfa le condizioni $y'(1) = \sin h(1)$ e $y'(0) = 0$. Un facile calcolo mostra che vi è un solo estremale dato da $\bar{y}(x) = \cos h(x)$. Mostrare per esercizio che si tratta di un minimo assoluto.

Esempio. Consideriamo il funzionale

$$J(y) = \int_0^\pi (y^{'2} + y^2 - 4y \sin x)dx - 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi) \ .$$

Proviamo che ha un minimo assoluto. L'equazione di Eulero è data da

$$(5) \qquad -y'' + y - 2\sin x$$

mentre le condiziobi (3) e (4) in questo caso diventano

$$(6) \qquad y'(0) - 2y(0) = 0, \qquad y'(\pi) - y(\pi) + 1 = 0 \ .$$

Vi è un solo estremale dato da $\bar{y}(x) = \sin x + e^x$. Per provare che si tratta di un minimo assoluto consideriamo una funzione $h(x) \in D^1[0,\pi]$ e valutiamo l'incremento $J(\bar{y}+h) - J(\bar{y})$. Tenendo conto delle (5) e delle (6) otteniamo

$$(7) \qquad J(\bar{y}+h) - J(\bar{y}) = \int_0^\pi (h^{'2} + h^2)dx + 2h^2(0) - h^2(\pi) \ ;$$

d'altra parte

$$h^2(\pi) - h^2(0) = \int_0^\pi 2hh'dx \ ,$$

per cui la (7) diviene

$$(8) \qquad \begin{aligned} J(\bar{y}+h) - J(\bar{y}) &= \int_0^\pi (h^{'2} + h^2)dx + h^2(0) - \int_0^\pi 2hh'dx = \\ &= \int_0^\pi (h' - h)^2 dx + h^2(0) \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Il funzionale

$$(9) \qquad J(y) = \int_0^1 y^{''2}dx + y^2(1) + y^{'2}(1)$$

che pensiamo definito nella classe

$$A = \{y(x) \in D^1[0,1], y(0) = 0, y'(0) = 1\}$$

non rientra fra quelli del tipo (1), lo studio si può però fare in modo simile. Consideriamo una arbitraria funzione $y(x)$ di classe $C^4[0,1]$ tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Evidentemente $y(x) \in A$. Sia poi $h(x) \in D^2[0,1]$ tale che $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Valutiamo l'incremento del funzionale

$$J(y+h) - J(y) = 2\int_0^1 y''h''dx + 2y(1)h(1) + 2y'(1)h'(1) + \int_0^1 h^{''2}dx + h^2(1) +$$
$$h^{'2}(1) = \text{(integrando per parti due volte, cosa lecita per le ipotesi fatte su } y(x))$$
$$= 2\int_0^1 y^{IV}hdx + 2[y(1) - y'''(1)]h(1) + 2[y'(1) + y''(1)]h'(1) + \int_0^1 h^{''2}dx +$$
$$h^2(1) + h^{'2}(1)\ .$$

Determiniamo adesso la $y(x)$ con il problema

$y^{(IV)}(x) = 0$

$y(1) - y'''(1) = 0 \quad y'(1) + y''(1) = 0$

$y'(0) = 1 \quad y(0) = 0.$

Si trova che esiste una e una sola soluzione

$$y(x) = \frac{3x^3}{29} - \frac{14x^2}{29} + x$$

che fornisce il minimo assoluto del funzionale nella classe A.

Il caso di piú variabili indipendenti Finora abbiamo considerato funzionali dipendenti da funzioni di una sola variabile. In molti problemi peró intervengono funzionali che dipendono da funzioni di due o piú variabili indipendenti. Per considerare la situazione piú semplice possibile ci limitiamo al caso di due variabili, ma la trattazione si estende facilmente al caso di n variabili indipendenti. Sia Ω un dominio limitato di $\mathbf{R}^2$ con una frontiera regolare cosí che valgano le formule di integrazione per parti e $F(x,y,u,p,q)$ una funzione continua con le derivate prime e seconde per (x,y) che varia in $\bar{\Omega}$ e per tutti i valori di u,p,q e consideriamo l'integrale doppio

$$J(u) = \int\int_\Omega F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))dxdy.$$

Consideriamo $J(u)$ definito nella classe $\mathcal{A}$ delle funzioni $u = u(x,y)$ continue con le derivate prime e seconde in $\bar{\Omega}$ e che si riducono sulla frontiera Γ di Ω ad una assegnata funzione $g(x,y)$. Ciò vuol dire che dette $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ le equazioni parametriche di Γ per $t_0 \le t \le t_1$ si ha

$$u(\varphi(t),\psi(t)) = g(\varphi(t),\psi(t)).$$

Supponiamo che in $\mathcal{A}$ esista una funzione $\bar{u}(x,y)$ che dà il minimo assoluto di $J(u)$ in $\mathcal{A}$. Sia poi $\eta(x,y)$ una funzione continua con le derivate prime e seconde in $\bar{\Omega}$ nulla su Γ. Definiamo la funzione

$$G(\epsilon) = J(\bar{u}+\epsilon\eta) = \int\int_\Omega F(x,y,\bar{u}(x,y)+\epsilon\eta(x,y), \bar{u}_x(x,y)+\epsilon\eta_x(x,y), \bar{u}_y(x,y)+\epsilon\eta_y(x,y))dxdy.$$

Per le ipotesi fatte la derivata $G'(0)$ esiste e abbamo $G(0)=0$. Questa condizione si traduce nella relazione

$$\int\int_\Omega \Big[F_u(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))\eta + F_p(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))\eta_x +$$

$$(*) \qquad F_q(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))\eta_y\Big]dxdy = 0$$

che vale per tutte le funzioni η prima indicate. Applicando le formule di integrazione per parti e tenendo conto che η è nulla su Γ otteniamo

$$\int\int_\Omega (F_p\eta_x + F_q\eta_y)dxdy = -\int\int_\Omega \Big(\frac{\partial}{\partial x}F_p + \frac{\partial}{\partial y}F_q\Big)\eta dxdy.$$

Quindi la (*) diviene

(**)

$$\int\int_\Omega \Big\{F_u(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial x}F_p(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial y}F_q(x,y,u,u_x,u_y)\Big\}\eta dxdy = 0$$

valida per tutte le funzioni $\eta(x,y) \in C^2(\bar{\Omega})$ che sono nulle sulla frontiera di Ω. Possiamo a questo punto utilizzare il seguente lemma, la cui facile dimostrazione si lascia al lettore.

Lemma. Se $\alpha(x,y)$ è una funzione continua in $\bar{\Omega}$ e se

$$\int\int_\Omega \alpha(x,y)\eta(x,y)dxdy = 0$$

per ogni funzione $\eta(x,y)$ continua con le derivate prime e seconde in $\bar{\Omega}$ e nulla sulla frontiera di Ω, allora $\alpha(x,y)=0$ in $\bar{\Omega}$.

Dalla (**) e dal lemma si deduce

$$F_u(x,y,u,u_x,u_y)-\frac{\partial}{\partial x}F_p(x,y,u,u_x,u_y)-\frac{\partial}{\partial y}F_q(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

che costituisce l'equazione di Eulero del funzionale.

Esempio. La lagrangiana $F=p^2+q^2$ genera il funzionale (integrale di Dirichlet)

$$\int_{\Omega}\int\Big(u_x^2+u_y^2)dxdy$$

che pensiamo definito nella classe delle funzioni $u(x,y)\in C^2(\bar{\Omega})$ che assumono valori assegnati g sul bordo. Siamo condotti a risolvere il problema al contorno (problema di Dirichlet)

$$\Delta u=0 \ in \ \Omega$$

con $u=g$, g funzione assegnata sulla frontiera Γ di Ω.

Esempio. Ricerca di superfici che sono grafici e che rendono minimo il funzionale dell'area

$$J(u)=\int_{\Omega}\int\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}dxdy.$$

In questo caso la lagrangiana è data da

$$F(x,y,u,p,q)=\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Calcolando l'equazione di Eulero si trova:

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0.$$

Questa equazione ha un importante significato geometrico: esprime il fatto che in ogni punto della superficie $z=u(x,y)$ la curvatura media è nulla.

Esistenza del minimo assoluto per certi funzionali quadratici in spazi di Hilbert Sia H uno spazio di Hilbert sui reali e denotiamo $(\ ,\ )$ il prodotto scalare e $\parallel u \parallel=\sqrt{(u,u)}$ la norma corrispondente. Una forma bilineare $a(u,v)$ definita in

$H \times H$ e a valori in $\mathbf{R^1}$ si dice limitata se esiste una costante M tale che per ogni $u, v \in H$ si abbia

$$|a(u,v)| \leq M \parallel u \parallel \parallel v \parallel .$$

La $a(u,v)$ è simmetrica se per ogni $u, v \in H$ vale

$$a(u,v) = a(v,u).$$

Infine la forma bilineare è coerciva se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$a(u,u) \geq \alpha \parallel u \parallel^2$$

per ogni $u \in H$.

Se f è un funzionale lineare e limitato definito in H indichiamo con $< f, u >$ il valore di f in corrispondenza di $u \in H$ e con $\|f\|_{H'}$ la norma di f. Come é noto vale

$$| < f, u > | \leq \|f\|_{H'} \|u\|$$

Teorema. Sia H uno spazion di Hilbert e $a(u,v)$ una forma bilineare, limitata e coerciva su H. Sia f un funzionale lineare e limitato su H. Definisco il funzionale

$$(*) \qquad J(u) = a(u,u) - 2 < f, u >, \ u \in H$$

Dico che $J(u)$ ha in H uno ed un sol minimo assoluto e cioè che esiste, unico $u \in H$ tale che

$$J(\bar{u}) \leq J(u), \forall \in H.$$

Inoltre vale l'equazione di "Eulero"

$$(*) \qquad \bar{u} \in H, \ a(\bar{u}, v) =< f, v >, \ \forall v \in H.$$

Dimostrazione. Il funzionale $J(u)$ è inferiormente limitato. Infatti per la coercivita' di $a(u,v)$ abbiamo

$$J(u) = a(u,u) - 2 < f, u > \geq \alpha \|u\|^2 - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2_{H'} - \alpha \|u\|^2 = -\frac{1}{\alpha} \|f\|^2_{H'}.$$

Quindi $d = inf J(u),\ u \in H \geq -\frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{H'} > -\infty$. Per definizione di inf esiste una successione minimizzante $\{u_n\}$ tale che

$$d \leq J(u_n) \leq d + \frac{1}{n}.$$

Dico che u_n è di Cauchy. Abbiamo per la simmetria di $a(u, v)$,

$$\alpha\|u_n - m_m\|^2 \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) =$$

$$2a(u_n, u_n) + 2a(u_m.u_m) - 4a\Big(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\Big)=$$

$$2a(u_n, u_n) - 4 < f, u_n > +2a(u_m.u_m) - 4 < f, u_m > -4a\Big(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\Big)+$$

$$8 < f, \frac{u_n + u_m}{2} >= 2J(u_n) + 2J(u_m) - 4J\Big(\frac{u_n + u_m}{2}\Big)\leq 2\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\Big).$$

Quindi la successione $\{u_n\}$ é di Cauchy. Poiché H é uno spazio di Hilbert esiste un elemento $\bar{u} \in H$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|u_n - \bar{u}\| = 0$. Èfacile provare, usando il fatto che la forma bilineare $a(u, v)$ e il funzionale f sono limitati che si ha:

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J(\bar{u}).$$

Inoltre poiché $d \leq J(\bar{u}) \leq d + \frac{1}{n}$, abbiamo anche

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = d.$$

Poichè il limite é unico abbiamo $d = J(\bar{u}) \leq J(u)$, per ogni u in H. Quindi esiste un minimo assoluto di $J(u)$ in H. Per ricavare la $(*)$ ragioniamo "alla Eulero". Sia $v \in H$ e definiamo la funzione $g(\epsilon) = J(\bar{u} + \epsilon v) = a(\bar{u} + \epsilon v, \bar{u} + \epsilon v) - 2 < f, \bar{u} + \epsilon v >$. Dalla condizione $g'(0) = 0$ e dalla simmetria di $a(u, v)$ segue la $(*)$. É poi facile dimostrare che la soluzione di $(*)$ è unica. Siano infatti u_1 e u_2 due soluzioni. Abbiamo

$$a(u_1, v) =< f, v >, \forall v \in H$$

$$a(u_2, v) =< f, v >, \forall v \in H.$$

Quindi per differenza $a(u_1 - u_2, v) = 0, \forall v \in H$. Scegliendo $v = u_1 - v_2$ abbiamo

$$0 \leq \alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Quindi $u_1 = u_2$. Questo prova anche che il minimo assoluto del funzionale è unico.

Se assumiamo nel teorema precedente $a(u,v) = (u,v)$ otteniamo con la $(*)$ il teorema di Riesz sulla rappresentazione dei funzionali lineari di uno spazio di Hilbert.

Variazione seconda. Sia $f(x,y,y') \in C^2([a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ una lagrangiana e $\bar{y} \in C^1_s([a,b])$, $h \in C^1_s([a,b])$. Posto $g(\epsilon) = J(\bar{y} + = \epsilon h)$ dove

$$J(u) = \int_a^b f(x,y,y')$$

e inoltre

$$R(x) = f_{y'y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$$

$$Q(x) = f_{y'y}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$$

$$P(x) = f_{y'y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)),$$

definiamo la variazione seconda di $J(u)$ relativa a $\bar{y}$ e valutata in h

$$J''(\bar{y})(h) = g''(0) = \int_a^b [R(x)h'^2 + 2Q(x)hh' + P(x)h^2]dx.$$

Teorema (condizione necessaria di Legendre). Sia $f(x,y,y') \in C^2([a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ e $\bar{y}(x)$ un minimo relativo debole per il funzionale

$$J(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$$

nella classe

$$A_1 = \{y(x) \in C^1_s([a,b)],\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b\}.$$

Dico che

$$R(x) \geq 0$$

per ogni $x \in [a,b]$ di continuitá di $\bar{y}'(x)$.

Dim. Sia $g(\epsilon) = J(\bar{y} + \epsilon h)$ con $h(x) \in C^1_s([a,b])$ e $h(a) = h(b) = 0$. Abbiamo $g''(0) \geq 0$ poiché se fosse $g''(0) < 0$, $\epsilon = 0$ sarebbe per $g(\epsilon)$ un massimo relativo proprio e questo non puó essere. Quindi

$$\int_a^b [R(x)h'^2 + 2Q(x)hh' + P(x)h^2]dx \geq 0$$

per tutte le funzioni $h(x) \in C^1_s([a,b])$ tali che $h(a) = h(b) = 0$. Sia $\bar{x} \in (a,b)$ un punto di continuitá per $\bar{y}'(x)$ e definiamo la famiglia di funzioni $h_\epsilon(x) = 0$ per $x \in (a, \bar{x}_\epsilon, \bar{x}_\epsilon)$, $h_\epsilon(x) = x - \bar{x} + \epsilon$ per $x \in (\bar{x} - \epsilon < x \leq \bar{x})$, $h_\epsilon(x) = -x + \bar{x} + \epsilon$ per $x \in (\bar{x} - \epsilon \leq x \leq \bar{x} + \epsilon)$, $h_\epsilon(x) = 0$ per $x \in (\bar{x} + \epsilon < x \leq b)$ dove supponiamo che $\epsilon > 0$ sia cosí piccolo che $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ sia un intervallo di continuitá per $\bar{y}'(x)$. Si vede facilmente che

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\epsilon} J''(h_\epsilon) = R(\bar{x});$$

da questo segue la tesi.

L'equazione di Jacobi. Sia $f(x,y,y') \in C^3([a,b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$. Consideriamo il funzionale

$$J(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$$

nella classe

$$A_1 = \{y(x) \in C^1_s([a,b)],\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b\}$$

e sia $\bar{y}(x) \in C^1([a,b])$ una soluzione dell'equazione di Eulero. Supponiamo $R(x)$ diverso da zero in $[a,b]$. Questo in particolare implica $\bar{y}(x) \in C^3([a,b])$. Cosideriamo il funzionale

$$I(y) = J''(\bar{y})(\eta) = \int_a^b \Big[R(x)\eta'^2 + 2Q(x)\eta\eta' + P(x)\eta^2\Big]dx.$$

Si chiama equazione di Jacobi l'equazione di Eulero di $I(\eta)$ e cioé

$$(R\eta')' - (P - Q)\eta = 0.$$

Poiché $R'(x) \in C^0([a,b])$, e $Q'(x) \in C^0([a,b])$, l'equazione di Jacobi é una equazione differenziale lineare a coefficienti continui. Inoltre, poiché $R(x)$ é diverso da zero il problema di Cauchy

$$(**) \qquad (R\eta')' - (p - q)\eta = 0\eta(a) = 0,\ \eta'(a) = k$$

ha una e una sola soluzione $\eta_k(x)$ in tutto l'intervallo $[a,b]$. Supponiamo k diverso da zero. Si dimostri per esercizio che le soluzioni dell'equazione

$$\eta_k(x) = 0$$

non dipendono da k.

Definizione. Sia $\eta_k(x)$ una soluzione del problema $(**)$ con k diverso da zero. Se esiste x_0, $a < x_0 \leq b$ tale che $\eta(x_0) = 0$ e $\eta(x)$ diverso da zero in (a, x_0), diremo che x_0 é il coniugato di a relativo all'estremale $\bar{y}(x)$.

Esempio. Sia $f = y'^2 - y^2$ e $a = 0$. L'equazione di Jacobi non dipende in questo caso dal particolare estremale considerato. Cerchiamo il coniugato di a. Dobbiamo risolvere il problema di Cauchy

$$\eta'' + \eta = 0, \ \eta(0) = 0, \ \eta'(0) = 1.$$

La soluzione é $\eta(x) = sin(x)$. Quindi il coniugato di a è π.

Esercizio. Trovare il coniugato del punto $a = 0$ per la lagrangiana $f = (y'^2 - y^2)e^{2x}$. Si noti che anche in questo caso l'equazione di Jacobi non dipende dal particolare estremale considerato.

Condizione Necessaria di Jacobi

Teorema. Sia$f(x, y, y') \in C^3([a, b] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1)$ e $y = \bar{y}(x) \in C^1([a, b])$ un minimo (massimo) relativo debole per il funzionale

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$$

nella classe

$$A_1 = \{y(x) \in C^1_s([a, b)], \ y(a) = y_a, \ y(b) = y_b\}.$$

Supponiamo $R(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e quindi per noti risultati $\bar{y}(x) \in C^3$. Dico che nell'intervallo aperto (a, b) non ci sono punti coniugati di a.

Dimostrazione. Per assurdo esista un punto $x_0 \in (a, b)$ coniugato di $x = a$. Questo significa che se $\eta(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$(*) \qquad (R\eta')' - (P - Q')\eta = 0, \ \eta(a) = 0, \ \eta'(a) = 1$$

abbiamo

$$\eta(x_0) = 0, \ \eta(x) > 0 \ in \ (a, x_0).$$

Osserviamo che

$$\eta'(x_0) \neq 0.$$

Infatti se fosse $\eta'(x_0) = 0$, avrei $\eta(x) = 0$ in $[a, b]$ per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$(*) \qquad (R\eta')' - (P - Q')\eta = 0, \ \eta(x_0) = 0, \ \eta'(x_0) = 0$$

che viene a coincidere con la soluzione di $(*)$. Definiamo la funzione $\hat{\eta}(x) = \eta(x)$ se $a \le x \le x_0$, $\hat{\eta}(x) = 0$ se $x_0 \le x \le b$. Abbiamo

$$\lim_{x \to x_0^-} \hat{\eta}'(x) = \eta'(x_0) \neq 0$$

e anche

$$\lim_{x \to x_0^+} \hat{\eta}'(x) = 0.$$

Poiché $\bar{y}(x)$ é minimo relativo debole abbiamo

$$I(h) = J''(\bar{y})(h) \int_a^b [R(x)h'^2 + 2Q(x)hh' + P(x)h^2]dx \geq 0$$

per tutte le funzioni $h(x) \in C_s^1([a, b])$ tali che $h(a) = h(b) = 0$. D'altra parte

$$I(\hat{\eta}) = J''(\bar{y})(\hat{\eta}) = 0.$$

Quindi $\hat{\eta}(x)$ é il minimo assoluto per il funzionale $I(h)$ nella classe $h(x) \in C_s^1([a, b])$ tali che $h(a) = h(b) = 0$. Sia

$$F(x, h, h') = Rh'^2 + 2Qhh' + Ph^2.$$

Abbiamo

$$F_{h'}(x, h, h') = 2Rh' + 2Qh.$$

D'altra parte $x = x_0$ è punto di discontinuità per $\hat{\eta}(x)$ e abbiamo

$$\lim_{x \to x_0+} F_{h'}(x, \hat{\eta}(x), \hat{\eta}'(x)) \neq \lim_{x \to x_0+} F_{h'}(x, \hat{\eta}(x), \hat{\eta}'(x)).$$

Poiché questo contraddice la prima equazione di Erdmann-Weierstrass siamo arrivati a un assurdo. $\square$

Esempio. Sia $f - y'^2 - y^2$, $a = 0$, $b > \pi$. $\bar{y}(x) = 0$ é comunque un estremale, ma non puó essere né un massimo relativo debole nè un minimo relativo debole poichè $x_0\pi$ è coniugato di $a = 0$.

Invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange. Consideriamo una applicazione

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}),\ \hat{\mathbf{q}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

e $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbf{R}^n$. Supponiamo

$$det\Big(\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial Q_j}(\bar{\mathbf{Q}})\Big) \neq 0.$$

Esistono quindi due intorni $\mathcal{U}$ e $\mathcal{N}$ con $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{U}$ e $\hat{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{Q}}) \in \mathcal{N}$ tali che

$$\hat{\mathbf{q}} : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$$

è un diffeomorfismo locale. Denotiamo l'inversa di

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q})$$

con

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}),$$

$\mathbf{q} \in \mathcal{N}$. Consideriamo una lagrangiana

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2([a, b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n).$$

A una curva

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t) \in C^2,\ t \in [a, b]$$

corrisponderà una curva

$$\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}(t)).$$

Supponiamo $[t_0, t_1] \subset [a, b]$ cosi piccolo che

$$\mathbf{Q}(t) \in \mathcal{U},\ \forall t \in [t_0, t_1].$$

Abbiamo

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial Q_j} \dot{Q}_j(t)$$

dove

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial Q_j} = \Big(\frac{\partial \hat{\hat{q}}_1}{\partial Q_j}, ..., \frac{\partial \hat{\hat{q}}_n}{\partial Q_j}\Big).$$

Appare quindi ragionevole considerare come lagrangiana nelle $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}$ la funzione

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = L\Big(t, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}), \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial Q_j}(\mathbf{q})\dot{Q}_j\Big).$$

Teorema. Se $\mathbf{Q}(t)$ è soluzione del sistema

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_j}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = 0$$

allora $\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}(t))$ è soluzione del sistema

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

e viceversa. Inoltre vale

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_s}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_s} = \sum_{r=1}^{n}\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_r}\Big\}\frac{\partial \hat{q}_r}{\partial Q_s}.$$

Dim.(Nel caso $n = 1$). Abbiamo

$$q = \hat{q}(Q), \;\; \dot{q} = \frac{d\hat{q}}{dQ}(Q)\dot{Q}$$

$$\mathcal{L}(t, Q, \hat{Q}) = L\Big(t, \hat{q}(Q), \frac{d\hat{q}}{dQ}\dot{Q}\Big)$$

quindi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q}\Big(t, \hat{q}(Q), \frac{d\hat{q}}{dQ}\dot{Q}\Big)\frac{d\hat{q}}{dQ}(Q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big(t, \hat{q}(Q), \frac{d\hat{q}}{dq}(Q)\dot{Q}\Big)\frac{d^2\hat{q}}{dq^2}(Q)\dot{Q}.$$

Per differenza abbiamo

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} =$$

$$\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q}\Big]\frac{d\hat{q}}{\partial Q}(Q).$$

Poichè $\frac{d\hat{q}}{dQ} \neq 0$ per ogni $Q \in \mathcal{U}$ abbiamo che se $q(t)$ è soluzione di $\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ allora $Q(t) = \hat{Q}(q(t))$ risolve $\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0$