file: c22set03.tex

Meccanica Razionale e Analitica 15/01/2004 nuovo ordinamento

Meccanica Razionale 15/01/2004 vecchio ordinamento

USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Risolvere due dei seguenti quattro esercizi e la prova al calcolatore

Primo Esercizio

Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 + 2y)dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A \ = \ \{y(x) \in C^4([0,1]);\ y(0) = 0,\ y(1) = 0\ y'(0) = 0,\ y'(1) = 0,$$
$$\int_0^1 y(x) = \frac{1}{720}\}.$$

Provare che esiste il minimo assoluto e trovarlo.

Secondo Esercizio

Studiare il sistema autonomo

$$\frac{dx}{dt} = sin(x),\ \frac{dy}{dt} = -sin(y)$$

sul toro $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ In particolare:
1) Trovare i punti singolari e classificarli. 2)Disegnare il diagramma di fase complessivo.

Terzo Esercizio

1)Trovare l'armonica coniugata $v(x,y)$ della funzione

$$u(x,y) = 4x^3 - 12xy^2 + 6x$$

tale che $v(0,0) = 0$.
2)Trovare la funzione $f(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$ tale che $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.
3)Considerare il sistema dinamico discreto generato dalla funzione $f(z) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Trovarne i punti fissi e studiarne la stabilitá.

Quarto Esercizio

Un'asta omogenea pesante AB, di lunghezza $2L$, massa m e baricentro G é vincolata a muoversi in un piano verticale intorno a un suo punto fisso O in modo che $|GO| = a > 0$.
Sull'asta é libero di muoversi senza attrito un punto materiale pesante P, di massa M. Il punto é attratto da una forza elastica di costante $k > 0$ verso il punto O.
Supposti i vincoli lisci e bilaterali e assunti i parametri lagrangiani θ e s della figura,
(a) determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilitá,
(b)trovare la lagrangiana,
(c)risolvere le equazioni di moto con le condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$, $s(0) = s_0$, $\frac{ds}{dt}(0) = s_0'$.

Prova al calcolatore
Tracciare tramite MAPLE il grafico della curva di equazioni parametriche

$$x(t) = \frac{3}{2}(cos(t))^3,\ y(t) = 3(sin(t))^3,\ t \in [0, 2\pi]$$

e calcolarne la lunghezza.