

## Meccanica Razionale e Analitica

10/6/04

### USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Risolvere il primo oppure il secondo esercizio, il terzo esercizio e la prova al calcolatore

#### Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$\int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2yx^4) dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^1([0, 1]), y(1) = 0\}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

#### Secondo Esercizio

Una lamina pesante  $OABC$  uniforme, quadrata, di lato  $a$ , ha il vertice  $O$  fisso e coincidente con l'origine di un riferimento cartesiano inerziale  $Oxyz$  (asse  $z$  verticale ascendente). Il lato  $OA$  della lamina è inoltre vincolato a muoversi su piano  $Oxy$  del riferimento. Tutti i vincoli sono privi di attrito. Sul vertice  $B$  agisce una forza elastica attrattiva di legge  $\mathbf{f} = -k(B - Q)$ , dove  $k > 0$  e  $Q$  è il punto di coordinate  $(0, 0, a)$ . Indicati con  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  i versori del riferimento inerziale, si assumano come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  formato dal versore  $\mathbf{k}$  e dal vettore  $OC$  e l'angolo  $\phi$  formato dal versore  $\mathbf{i}$  e dal vettore  $OA$ . (a) Trovare la lagrangiana. (b) Trovare un integrale primo del moto.

## Prova al Calcolatore

(1) Trovare la primitiva della funzione

$$f(x) = x^5 \sqrt{1 + 2x + 2x^2}$$

e verificare per derivazione il risultato ottenuto.  
Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Trovare anche tale integrale definito in forma decimale con 4 cifre decimali esatte.

(2) Disegnare il grafico della funzione che in coordinate polari ha l'equazione

$$\rho(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))$$

per  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e calcolare l'area della regione di piano contenuta nella curva.

(3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = -2ty(t) + t, \quad y(t_0) = y_0$$