Esercizi per casa 12/12/2007

(1) Mostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $f * f = f$ q.o. allora $f = 0$ q.o.

(2) Sia $f \in L^1([0,1])$, $S = \{x : f(x) \in \mathbb{Z}\}$. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n \, dx = |S|$$

(3) Sia $A = \{ f \in L^1([0,1]) \text{ t.c. } f \geq 0 \text{ (q.o.)} ; \int_0^1 f(x)\,dx = 1 \}$
Mostrare che A è chiuso, limitato, ma non compatto.
Mostrare che A NON è chiuso nella topologia debole; determinarne la chiusura debole.

(4) Sia $A := \{ f \in L^1([0,1]) : |f| \geq 1 \text{ q.o.} \}$. Dire se A è chiuso in L^1.
Dire se A è chiuso per la topologia debole.

(5) Dire se esiste $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che
$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ & $\hat{f}(\xi) \geq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$

(6) Sia A una matrice simmetrica definita positiva.
Calcolare $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-Ax\cdot x)\,dx$

(7) Sia H sp. di Hilbert; $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale.
Mostrare che $x_n \rightharpoonup 0$ $n \to \infty$ (cioè x_n converge a zero nella top. debole)

(8) Sia $f_0 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ e definiamo induttivamente $f_{n+1}(x) = f_n(2x)$.
Mostrare che $f_n \rightharpoonup 0$ (debolmente) in L^2.

(9) Sia H spazio di Hilbert e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione tale che
$\|x_n\| = 1 \ \forall n$. Mostrare che se $x_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} y$ e $\|y\| = 1$ allora
la convergenza è in norma (cioè $\|x_n - y\| \to 0$)

(10) Sia $S : \ell^2(\mathbb{N}) \circlearrowleft$ definito da $(Sx)(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ x(k-1) & k \geq 1 \end{cases}$

Mostrare che $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S^k x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{N})$