Es 1 - ξ $\qquad F(x,y) = x y e^{x-2y}$

(i)

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (y + xy)\, e^{x-2y}} \qquad \boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (x - 2xy)\, e^{x-2y}}$$

$$\nabla F(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y(1+x) = 0 \\ x(1-2y) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha due soluzioni:

$$\boxed{P_0 = (0,0) \quad \text{e} \quad P_1 = (-1, 1/2)}$$

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = y(2+x)\, e^{x-2y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+x)(1-2y)\, e^{x-2y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 4x(y-1)\, e^{x-2y}$$

Pertanto

$$H_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H_F(0,0)\right) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

$\boxed{\text{$H_F$ ha autovalori con segno opposto; (0,0) è un punto di sella}}$

$$H_F(-1, 1/2) = \begin{pmatrix} 1/2e^2 & 0 \\ 0 & 2/e^2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2e^2} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{e^2} > 0$$

H_F ha ~~entrambi~~ autovalori entrambi positivi

$\boxed{\text{$(-1, 1/2)$ è punto di minimo locale}}$

Es 1 - (ii) (Versione Ξ)

- $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue su $\mathbb{R}^2 \Rightarrow F \in C^1$
- $F(2,1) = 2 \Rightarrow (2,1) \in C$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1) = -2 \neq 0$

Pertanto possiamo applicare il teorema del Dini che ci assicura che C, in un intorno di (2,1), è grafico $y = f(x)$ con $f \in C^1$.

La retta tangente avrà equazione

$y - 1 = f'(2)(x-2)$ dove $f'(2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(2,1)} = \frac{3}{2}$

cioè $\boxed{y = \frac{3}{2}x - 2}$

(iii) Q è un insieme chiuso e limitato, quindi

$\inf_Q F = \min_Q F$ $\sup_Q F = \max_Q F$

~~xxxxx~~ Nessun punto stazionario è interno a Q

$\Rightarrow$ massimo e minimo sono assunti su ∂Q

Osserviamo che ~~xxxxx~~ $F(0,0) = 0$ $F(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in Q$

Quindi $\min_Q F = F(0,0) = 0$

Il massimo di F deve essere sul lato superiore o sul lato destro di Q

$\varphi(t) := F(t,2) = 2t\, e^{t-4}$ $\varphi'(t) = 2(1+t)\, e^{t-4} > 0 \quad \forall t \in [0,3]$

$\max_{t \in [0,3]} F(t,2) = F(3,2) = 6/e$

$$\psi(t) = F(3,t) = 3t\, e^{3-2t} \qquad \psi'(t) = 3(1-2t)\, e^{3-2t}$$

$$\psi'(t) \geq 0 \iff t \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \max_{t\in[0,2]} F(3,t) = F(3,\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{2} e^2$$

Osserviamo che $F(3,\frac{1}{2}) > F(3,2)$, quindi

$$\boxed{\max_{Q} F = F(3,\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{2} e^2}$$

$\boxed{\text{Es 1 - 5}}$ $F(x,y) = xy\, e^{3x-y}$

(i)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y(1+3x)\, e^{3x-y} \quad ; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x(1-y)\, e^{3x-y}$$

$$\nabla F(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y(1+3x) = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha due soluzioni:

$$\boxed{P_0 = (0,0) \quad \text{e} \quad P_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)}$$

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 3y(2+3x)\, e^{3x-y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+3x)(1-y)\, e^{3x-y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = x(y-2)\, e^{3x-y}$$

$$H_F(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha autovalori di segno opposto, quindi P_0 è un punto di sella

$$H_F(P_1) = \begin{pmatrix} 3/e^2 & 0 \\ 0 & 1/3e^2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha autovalori entrambi positivi, quindi P_1 è punto di minimo locale

Es 1 – ii (Versione 5) Osserviamo che

- $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue su $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $F \in C^1$
- $F(1,3) = 3$ $\Rightarrow$ $(1,3) \in C$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(1,3) = -2 \neq 0$

Pertanto possiamo applicare il teorema del Dini che ci assicura che C, in un intorno di $(1,3)$, è grafico di $y = f(x)$ con $f \in C^1$

La retta tangente avrà equazione

$$y - 3 = f'(1)\,(x-1) \qquad \text{con} \qquad f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,3)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,3)} = \frac{3}{2}$$

cioé $\boxed{y = 6x - 3}$

(iii) Q è un insieme chiuso e limitato, quindi

$\boxed{\inf_Q F = \min_Q F}$ $\boxed{\sup_Q F = \max_Q F}$.

Nessun punto stazionario è interno a Q $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ massimo e minimo sono assunti su ∂Q.

$$\left.\begin{array}{l} F(0,0) = 0 \\ F(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in Q \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\min_Q F = F(0,0) = 0}$$

$\max_Q F$ verrà assunto sul lato superiore o su quello destro di Q

$\varphi(t) := F(2,t) = 2t\, e^{6-t}$ $\qquad$ $\varphi'(t) = 2(1-t)\, e^{6-t}$

$\psi(t) := F(t,5) = 5t\, e^{3t-5}$ $\qquad$ $\psi'(t) = 5(1+3t)\, e^{3t-5}$ $\qquad$ $\psi'(t) > 0$ per $t \in [0,2]$

Da ciò si deduce che $\boxed{\max_Q F = F(2,1) = 2e^5}$