C

Esercizio 3

(a) Decomponiamo V nel tronco di cono generato dalla rotazione attorno ~~del~~l'asse delle x del trapezio di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(1,0)$, detto V_1, e nel solido V_2 ottenuto dalla rotazione del triangolo di vertici $(2,0)$, $(4,2)$, $(2,2)$.

Si ha

$$\mathrm{vol}(V_1) = \pi \int_0^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^2 (2+x)^2\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{12}\Big[(x+2)^3\Big]_0^2 = \frac{14\pi}{3}$$

mentre $\qquad V_2 = C_1 - C_2$

dove C_1 è il cilindro generato dalla rotazione attorno all'asse x del quadrato di vertici $(2,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$, $(2,2)$ e C_2 è il cono ottenuto ruotando il triangolo di vertici $(2,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$. Dunque

$$\mathrm{vol}(V_2) = \mathrm{vol}(C_1) - \mathrm{vol}(C_2) = \pi\int_2^4 4\,dx - \pi\int_2^4 (x-2)^2 dx =$$

$$= 8\pi - \pi\int_0^2 t^2\,dt = 8\pi - \frac{\pi}{3}\Big[t^3\Big]_0^2 = 8\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

Pertanto $\quad \mathrm{vol}(V) = \mathrm{vol}(V_1) + \mathrm{vol}(V_2) = 10\pi$

(b) Per il teorema della divergenza il flusso uscente da V del campo $\underline{F}$ è uguale a

$$\iiint_V \operatorname{div}\underline{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

D'altra parte

$$\operatorname{div}\underline{F}(x,y,z) = 1 + 3(y^2+z^2).$$

Facendo riferimento alla decomposizione del punto (a), si ottiene allora, passando a coordinate cilindriche

$$\iiint_{V_1} (1+3(y^2+z^2))\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dx \int_0^{1+x/2} (\rho+3\rho^3)\,d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[\rho^2/2 + 3/4\,\rho^4\right]_0^{1+\frac{x}{2}} dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{(2+x)^2}{4} + \frac{(2+x)^4}{32}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[(2+x)^3\right]_0^2 + \frac{\pi}{160}\left[(2+x)^5\right]_0^2 = \frac{14}{3}\pi + \frac{31}{5}\pi$$

$$\iiint_{C_1} (1+3(y^2+z^2))\,dx\,dy\,dz = 2\pi \int_2^4 dx \int_0^2 (\rho+3\rho^3)\,d\rho =$$

$$= 4\pi\left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{3}{4}\rho^4\right]_0^2 = 8\pi + 48\pi = 56\pi$$

$$\iiint_{C_2} (1+3(y^2+z^2))\,dx\,dy\,dz = 2\pi \int_2^4 dx \int_0^{x-2} (\rho+3\rho^3)\,d\rho =$$

$$= 2\pi \int_2^4 \left[\rho^2/2 + 3/4\,\rho^4\right]_0^{x-2} dx = \pi \int_0^2 \left(t^2 + \frac{3t^4}{2}\right) dt =$$

$$= \pi\left[\frac{t^3}{3} + \frac{3t^5}{10}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3} + \frac{48}{5}\pi.$$

Pertanto

$$\iiint_V (1+3(y^2+z^2))\,dx\,dy\,dz = 58\pi - \frac{17}{5}\pi.$$

Esercizio 3

(a) Possiamo vedere V come il solido V_1 ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y il trapezio di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(0,2)$ a cui sottraiamo il cono C generato ruotando il triangolo di vertici $(0,1)$, $(2,2)$, $(0,2)$. Pertanto

$$\mathrm{vol}(V) = \mathrm{vol}(V_1) - \mathrm{vol}(C) = \pi\int_0^2 (y+2)^2\,dy + - \pi\int_1^2 (2(y-1))^2\,dy = \frac{\pi}{3}\Big[(y+2)^3\Big]_0^2 - \frac{4\pi}{3}\Big[(y-1)^3\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{56\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{52\pi}{3}$$

b) Per il teorema della divergenza, il flusso uscente da V del campo $\underline{F}$ è uguale a

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\underline{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

D'altra parte

$$\mathrm{div}\,\underline{F}(x,y,z) = 1 + 3(x^2+z^2).$$

Facendo riferimento alla decomposizione del punto (a), si ottiene allora, passando a coordinate cilindriche

$$\iiint_V (1+3(x^2+z^2))\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dy \int_0^{y+2} (\rho+3\rho^3)\,d\rho \; +$$

$$- \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dy \int_0^{2(y-1)} (\rho+3\rho^3)\,d\rho = \pi \int_0^2 \left[\rho^2+\frac{3}{2}\rho^4\right]_0^{y+2} dy$$

$$- \pi \int_1^2 \left[\rho^2+\frac{3}{2}\rho^4\right]_0^{2(y-1)} dy = \pi \int_0^2 (y+2)^2\,dy \; +$$

$$+ \frac{3\pi}{2} \int_0^2 (y+2)^4\,dy \quad - 4\pi \int_1^2 (y-1)^2\,dy - 8\pi \int_1^2 (y-1)^4\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[(y+2)^3\right]_0^2 + \frac{3\pi}{10}\left[(y+2)^5\right]_0^2 \; +$$

$$- \frac{4\pi}{3}\left[(y-1)^3\right]_1^2 - \frac{8\pi}{5}\left[(y-1)^5\right]_1^2 = \frac{64\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} \; +$$

$$+ \frac{1536\pi}{5} - \frac{48\pi}{5} - \frac{4\pi}{3} - \frac{8\pi}{5} =$$

$$= \frac{52\pi}{3} + \frac{296}{5}\pi$$