Es 1 - ξ

(i) Notiamo che

$$|f(x,y)| = |x|\, e^{-2x^2-y^2} \leq |x|\, e^{-x^2-y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}\, e^{-x^2-y^2} \qquad (*)$$

Dato che $\lim_{t\to\infty} t\, e^{-t^2} = 0$ si ha che la funzione ~~~~ f è ~~~~ infinitesima per $|(x,y)| \to +\infty$:

$$\boxed{\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0}.$$

(ii) Dimostriamo dapprima che f ammette massimo (e minimo) su tutto $\mathbb{R}^2$. A questo scopo osserviamo che $f(1,0) = e^{-2} > 0$; dunque per il punto (i) deduciamo che esiste $R > 1$ tale che

$$f(x,y) \leq e^{-2} \qquad \text{per ogni } (x,y) \text{ tale che } \sqrt{x^2+y^2} > R \qquad (**)$$

Per il teorema di Weierstrass esiste $(x_0,y_0) \in \overline{B(0,R)}$ tale che

$$f(x_0,y_0) = \max_{(x,y)\in \overline{B(0,R)}} f(x,y)$$

Ma allora (x_0,y_0) è anche massimo globale :

~~Ma~~ infatti se $(x,y) \notin \overline{B(\underline{0},R)}$ da $(**)$ segue che

$$f(x,y) \leq e^{-2} \leq f(1,0) \leq f(x_0,y_0) .$$

Pertanto $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Un ragionamento analogo mostra che l'estremo inferiore di f è in realtà un minimo.

Per trovare i punti (ed i valori) di massimo e minimo basta ~~questo~~ determinare i punti stazionari.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-4x^2)\, e^{-2x^2-y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xy\, e^{-2x^2-y^2} \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-4x^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono $P_1 = (\frac{1}{2}, 0)$ e $P_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$; $\cancel{f(P_1) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \quad f(P_2) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}}$

Dato che $f(P_1) = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$, $f(P_2) = -\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$

deduciamo che P_1 è il massimo e P_2 il minimo e

$$\boxed{\sup_{\mathbb{R}^2} f = \frac{1}{2\sqrt{e}} \; ; \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\frac{1}{2\sqrt{e}}}$$

(iii) Osserviamo che, B è chiuso e limitato, quindi (per Weierstrass) f ammette massimo e minimo su B.

L'unico punto stazionario che giace nella parte interna di B è $P_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$. Dato che questo è anche il punto di minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$, avremo

$$\boxed{\min_B f = f(P_2) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}}.$$

Il punto di massimo deve cadere sul bordo ∂B; per determinarlo utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$$\begin{cases} (1-4x^2)\, e^{-2x^2-y^2} = \lambda(2x+2) & (\mathrm{I}) \\ -2xy\, e^{-2x^2-y^2} = 2\lambda y & (\mathrm{II}) \\ x^2+2x+y^2 = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Affinché la seconda equazione sia soddisfatta deve essere $y=0$ oppure $\lambda = -x\, e^{-2x^2-y^2}$

(•) Se $y=0$, da (III) segue che $x=0$ oppure $x=-2$

trovo quindi i punti stazionari vincolati

$P_3 = (-2, 0)$ e $P_4 = (0,0)$.

(∞) Se $\lambda = -x\, e^{-2x^2-y^2}$, da (I) otteniamo che

$$1-4x^2 = -x(2x+2)$$

$$2x^2-2x-1=0$$

$$x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

~~Dato che $\partial B \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \le 0\}$, da (III) ...~~

Da (III) segue che $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$ e

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1-\sqrt{3} + y^2 = 0$$

ovvero
$$y^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 .$$

Otteniamo quindi altri due punti $P_5 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}-2}\right)$

$P_6 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}-2}\right)$

Osserviamo che

$$f(P_3) = -2e^{-8}, \quad f(P_4) = 0$$

$$f(P_5) = f(P_6) < 0$$ perché hanno ascissa negativa

~~pertanto~~ In definitiva avremo che

$$\boxed{\max_B f = \max_{\partial B} f = f(P_4) = 0}$$

$\boxed{\text{ES 1} - \xi}$

(i) Notiamo che

$$|f(x,y)| = 3|y|\,e^{-x^2-2y^2} \leq 3|y|\,e^{-x^2-y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2}\,e^{-x^2-y^2} \qquad (*)$$

Dato che $\lim_{t\to\infty} 3t\,e^{-t^2} = 0$, si ha che la funzione f è infinitesima per $|(x,y)| \longrightarrow +\infty$

$$\boxed{\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = 0}$$

(ii) In primo luogo conviene dimostrare che f ammette massimo e minimo assoluto. (Questo segue – come nella versione ξ – dal fatto che $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = 0$ e che f assume sia valori strettamente positivi che strettamente negativi).

Dato che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, cerchiamo massimi e minimi tra i punti critici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xy\,e^{-x^2-2y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(1-4y^2)\,e^{-x^2-2y^2}.$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} xy = 0 \\ 1-4y^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} P_1 = (0, \frac{1}{2}) \\ P_2 = (0, -\frac{1}{2}) \end{array}$$

Ho esattamente due punti critici : $f(P_1) = 3/2\sqrt{e}$, $f(P_2) = -\frac{3}{2\sqrt{e}}$

P_1 sarà il massimo e P_2 il minimo.

(iii) B è un disco chiuso e limitato, quindi (per il Th di Weierstrass) f ammette massimo & minimo su B.

L'unico punto stazionario che giace nella parte interna di B é $P_1 = (0, \frac{1}{2})$. Dato che questo è punto di massimo assoluto avremo

$$\boxed{\max_B f = f(P_1) = \frac{3}{2\sqrt{e}}}$$

Il punto di minimo deve cadere sul bordo ∂B; per determinarlo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} -6xy\, e^{-x^2-2y^2} = \lambda\, 2x & (\mathrm{I}) \\ 3(1-4y^2)\, e^{-x^2-2y^2} = \lambda(2y-2) & (\mathrm{II}) \\ x^2+y^2-2y = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Per (I) si ha che $x=0$ oppure $2\lambda = -6y\, e^{-x^2-2y^2}$

- Se $x=0$ allora da (III) $y = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$ e dunque troviamo $P_3 = (0,0)$, $P_4 = (0,2)$
- Se invece $2\lambda = -6y\, e^{-x^2-2y^2}$ da II otteniamo che

$$3(1-4y^2)\cancel{e^{-x^2-2y^2}} = -6y\cancel{e^{-x^2-2y^2}}(y-1) \quad \text{e dunque}$$

$$2y^2+2y-1=0$$

Questa equazione ha due soluzioni

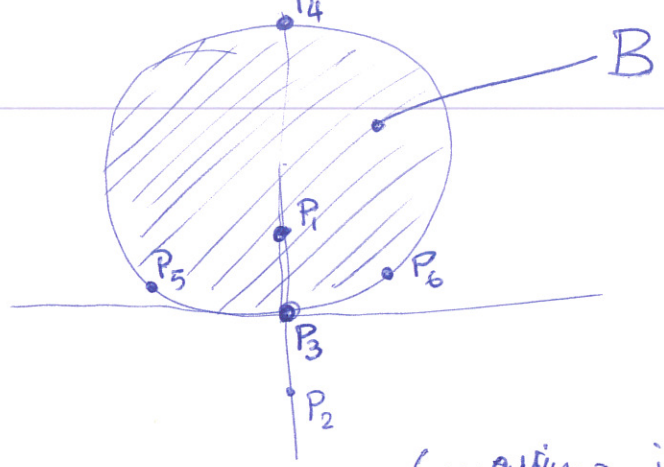
$$y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Considerando l'equazione (III) vediamo che la ~~soluzione~~ radice negativa non dà luogo ad alcuna soluzione, mentre con $y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

troviamo i punti $P_5 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}-2}\,,\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$$P_6 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}-2}\,,\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

In definitiva abbiamo la situazione seguente



$$\max_B f = f(P_1) = \frac{3}{2\sqrt{e}}$$ (massimo interno)

$$\boxed{\min_B f = f(P_3) = 0}$$ (minimo vincolato a ∂B)

Perché su tutti gli altri punti la funzione f assume valori strettamente positivi.